Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 9 MAT214

28 de mayo 2024

Mateo Hidalgo

1. Recuerdo

1. Definición 4.2.21. - Sea $I \subseteq A$ un ideal y sea M un A-módulo. Definimos el sub-módulo

$$IM := \left\{ \sum_{\text{finita}} a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M \right\}.$$

2. Teorema 4.2.35. - Sea M un A-módulo libre finitamente generado. Entonces, todas sus bases son finitas y del mismo cardinal, llamado el rango de M y denotado $\mathrm{rg}(M)$. Más aún, el cardinal de una familia linealmente independiente (resp., generadora) es $\leqslant$ (resp., $\geqslant$) $\mathrm{rg}(M)$.

3. Un grupo abeliano G es divisible si, para todo $g \in G$ y todo entero positivo n, hay $h \in G$ tal que $nh = g$.

2. Ejercicios

1. De un ejemplo explícito de una función de un A-módulo M a otro N que sea un morfismo de grupos pero no de A-módulos.

   Solución: Consideremos el anillo $A = \mathbb{C}$, cuerpo de los números complejos, y $M = N = \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}-$módulos, entonces la función conjugar es morfismo de grupos pero no es un morfismo de $\mathbb{C}$-módulos.

2. Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Pruebe que $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ y M son isomorfos como A-módulos. [Indicación: Muestre que cada elemento de $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ está determinado por su valor en la identidad de A.]

   Solución: Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$, sea $a \in A$. Entonces $\phi(a) = a\phi(1)$, por lo que ϕ está determinado por $\phi(1)$. Consideremos entonces la aplicación evaluar en la identidad dada por $f : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$, $f(\phi) = \phi(1)$. Mostremos que f es biyectiva y que es un morfismo de A-módulos. Notamos que para $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ $f(\phi+\psi) = (\phi+\psi)(1) = \psi(1)+\psi(1) = f(\phi)+f(\psi)$. Notamos que para $a \in A$, $f(a\phi) = (a\phi)(1) = a\phi(1)af(\phi)$, así que f es morfismo de A-módulos. La indicación prueba que f es inyectiva. Para ver que f es sobreyectiva, notemos que dado $m \in M$, podemos definir un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ con $\varphi(1) = m$. En efecto, basta demostrar la aplicación $\varphi(a) = am$ es un morfismo (pues $\varphi(a + a') = (a + a')m = am + a'm = \varphi(a) + \varphi(a'), a'\varphi(a) = a'(am) = (a'a)m = \phi(a'a)$) con $f(\phi) = \phi(1) = m$.

3. Sea A un anillo conmutativo. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ A-módulos y sea B_i un submódulo de A_i para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Pruebe que

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) / (B_1 \times \cdots \times B_n) \cong (A_1/B_1) \times \cdots \times (A_n/B_n).$$

   pruebe en particular que

$$A^n/IA^n \cong A/IA \times \cdots \times A/IA = (A/IA)^n \quad (n \text{ veces})$$

Solución: Recordemos que la aplicación $\pi : M \to M/N$, $m \mapsto [m]$ es un morfismo. Consideremos la aplicación dada por $\phi : A_1 \times \cdots \times A_n \to (A_1/B_1) \times \cdots \times (A_n/B_n)$, $\phi(a_1, \ldots, a_n) = ([a_1], \ldots, [a_n])$. Notemos que es un morfismo de A-módulos pues $\phi(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = ([a_1 + b_1], \ldots, [a_n + b_n]) = ([a_1, \ldots, a_n]) + ([b_1], \ldots, [b_n])$ y $a(\phi(a_1, \ldots, a_n)) = a([a_1], \ldots, [a_n]) = ([aa_1, \ldots, aa_n]) = \phi(a(a_1, \ldots, a_n))$. Notamos que ϕ es claramente sobreyectiva y que $\phi(a_1, \ldots, a_n) = ([0], \ldots, [0]) \iff (a_1, \ldots, a_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n$, así que $\ker(\phi) = B_1 \times \cdots \times B_n$ y concluimos lo pedido por el Teorema de Noether para A-módulos.

Al notar que $(IR^n) = (IR)^n$, el segundo resultado es inmediato de lo anterior.

4. Sea I un ideal nilpotente en el anillo conmutativo A (es decir, existe $k \geqslant 1$ tal que $I^k = 0$), sean M y N $A-$módulos y sea $\varphi : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Muestre que si el mapa inducido $\bar{\varphi} : M/IM \to N/IN$ es sobreyectivo entonces φ es sobreyectivo.

   Solución: Tenemos que para todo $[n] \in N/IN$ existe $[m] \in M/IM$ tal que $\bar{\varphi}([m]) = [\varphi(m)] = [n]$. Sea $n \in N$, por hipótesis existe $m \in M$ tal que para todo $m' \sim m$ se tiene $\varphi(m') = n + n'$ con $n' \in IN$. Es decir $N \subset \varphi(M) + IN$. Pero entonces

   $$N \subset \varphi(M) + IN = \varphi(M) + I(\varphi(M) + IN) \subset \varphi(M) + I^2N \subset \cdots \subset \varphi(M) + I^kN$$

   (donde usamos que $I\varphi(M) \subset \varphi(M)$ pues $\varphi(M)$ es un módulo), tomando $k \geqslant 1$ tal que $I^k = 0$ tenemos que $N \subset \varphi(M)$, es decir, φ es un morfismo sobreyectivo.

5. Pruebe que si M es un A-módulo finitamente generado por n elementos entonces todo cociente de M puede ser generado por n o menos elementos. Deducir que todo cociente de un módulo cíclico es cíclico.

   Solución: Por hipótesis, tenemos $\psi : A^n \to M$ morfismo sobreyectivo, por tanto $\pi \circ \psi : M \to M/N$ también es sobreyectivo.

6. Sea N un submódulo de M. Pruebe que si M/N y N son finitamente generados entonces M también es finitamente generado.

   Solución: Sean $[m_1], \ldots, [m_r]$ generadores de M/N y $n_1, \ldots, n_s$ generadores de N. Sea $m \in M$, tenemos que $[m] = a_1[m_1] + \cdots + a_r[m_r] = [a_1m_1 + \ldots a_nm_n]$ y por tanto existe, por definición del cociente, $n' \in N$ tal que $m + n' = a_1m_1 + \ldots a_nm_n$ por tanto escribiendo $n' = b_1n_1 + \cdots + b_sn_s$ tenemos $m = a_1m_1 + \ldots a_rm_r - b_1n_1 - \cdots - b_sn_s$. Concluimos que M es finitamente generado, de hecho M es generado por $m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_s$.

7. Un A-módulo M es llamado irreducible si $M \neq 0$ y si 0 y M son los únicos submódulos de M (cf. grupo simple). Muestre que M es irreducible si y solo si $M \neq 0$ y M es un módulo cíclico que es generado por todo (cualquier) elemento no nulo. Determine todos los $\mathbb{Z}$-módulos irreducibles.

   Solución: En efecto, si M es irreducible y $a \in M$ con $a \neq 0$ entonces $\langle a \rangle$ es un submódulo no nulo de M, por tanto $\langle a \rangle = M$. Para el converso, sea N un submódulo no nulo de M sea $0 \neq n \in N$, entonces $M = \langle n \rangle \subset N$ por lo que $M = N$. Los $\mathbb{Z}$-módulos cíclicos son los grupos abelianos cíclicos, los cuales son los grupos de al forma $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sea G uno de estos grupos abelianos cíclios. Sabemos que un elemento $[x] \in G$ genera si y solo si $\text{mcd}(x, n) = 1$, si y solo si x tiene inverso multiplicativo en G. Deducimos así que para que todo elemento no nulo x genere G tenemos necesariamente G un cuerpo, es decir, $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo.

8. Asuma que A es un anillo conmutativo. Muestre que un A-módulo M es irreducible si y solo si M es isomorfo (como A-módulo) a A/I donde I es un ideal maximal de A. [Por el ejercicio anterior, si M es irreducible entonces hay un mapa natural $A \to M$ definido por $r \mapsto rm$, donde m es cualquier elemento no-nulo fijo de M.]

   Solución: Si M es isomorfo a A/I con I ideal maximal, entonces, claramente, los submódulos de M se corresponden con los submódulos de A/I, pero como A/I es un cuerpo, solo tiene a 0 y a A/I como submódulos, por lo que es irreducible y M también. Supongamos M irreducible y $I \subset M$ ideal maximal, sea $m \in M$

no nulo fijo. Definamos $\varphi : A \to M$ dado por $\varphi(a) = am$. Tenemos que φ es un morfismo. Claramente φ es un morfismo no-nulo, así que, como M es irreducible, $\varphi(A) = M$, si probamos que $\ker(\varphi) := I$ es un ideal maximal de A estaremos listos, pues por Teorema de Noether tendremos $A/I \cong M$. En efecto, el kernel de φ es un submódulo de A, es decir, un ideal. Además, tenemos que $\varphi(\ker(\varphi)) = 0$, si hubiese un ideal J (que podemos asumir maximal) con $I \subsetneq J \subsetneq A$, entonces $0 \neq \varphi(J) \subset M$, por lo que $\varphi(J) = M \cong A/J \cong A/I$, como A/J es cuerpo tenemos A/I cuerpo y por tanto I maximal.

9. Muestre que si M_1 y M_2 son A-módulos irreducibles, entonces todo morfismo de A-módulos no nulo de M_1 a M_2 es un isomorfismo. Deducir que si M es irreducible entonces $\mathrm{End}_A(M)$ es un dominio integral (este resultado es llamado Lema de Schur). [Indicación: Considere el kernel y la imagen]

   Solución: Sea $\phi : M_1 \to M_2$ morfismo no nulo. Notemos que $\mathrm{Im}(\phi)$ es un submódulo de M_2 no nulo, así que necesariamente $\mathrm{Im}(\phi) = M_2$ y notemos que $\ker(\phi)$ es un submódulo de M_1 distinto de M_1, por lo que $\ker(\phi) = 0$ y por tanto ϕ es isomorfismo. Si vemos a $\mathrm{End}_A(M)$ como anillo con composición de morfismos como producto, acabamos de probar que todo elemento no nulo es invertible, es decir, el anillo es dominio integral.

10. Sea I un ideal no nulo de A. Mostrar que I es un A-módulo libre si solo si I es un ideal principal generado por un elemento que no es divisor de 0.

    Solución: Supongamos que I es libre. Recordemos que asumimos que el rango de un módulo libre está únicamente determinado, si I tuviese rango 1, entonces sería generado por un elemento, por contradicción, supongamos que I tiene rango al menos 2. Sean e_1 y e_2 elementos distintos de alguna base. Entonces tenemos $e_2e_1 - e_1e_2 = 0$, lo cual es imposible, ya que e_i son independientes (aquí usamos la conmutatividad). Por tanto, I tiene rango finito, y su rango es 1. Digamos que I es generado sobre A por $e \in A$; notemos que e no puede ser divisor del cero, sino $\{e\}$ no sería linealmente independiente.

    Conversamente, supongamos que I es ideal principal generado por e un elemento que no es divisor del cero. Entonces el mapa de A a I dado por $r \mapsto re$ es un isomorfismo A-módulos.

11. Mostrar que el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ no es libre.

    Solución: Cualquier par de racionales no nulos son linealmente dependientes: Si $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0 \neq b$, entonces existen enteros no-nulos n y m tales que $na + mb = 0$.

    Así que si $\mathbb{Q}$ fuese libre, sería libre de rango 1, y por tanto cíclico. Pero $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo cíclico, pues el único $\mathbb{Z}$-módulo (grupo abeliano) cíclico infinito es $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ no son isomorfos como grupos, mucho menos como $\mathbb{Z}$-módulos.

3. Propuestos

1. Exhiba todos los morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

2. Pruebe que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z}$.