Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 8 MAT214

14 de mayo 2024

Mateo Hidalgo

1. Ejercicios

1. Probar que los morfismos regulares son continuos con respecto a la topología de Zariski.

   Solución: Importante, la topología producto de $\mathbb{A}^n$ no es la topología de $\mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1$ (propuesto), así que el siguiente razonamiento es **incorrecto:** *Como las funciones polinomiales son continuas en la topología de la norma y un morfismo regular es polinomial en cada coordenada, debe ser continuo por ser continuo en cada coordenada.*

   Basta mostrar que si $\varphi : X \to Y$ es morfismo regular entonces $\varphi^{-1}(A)$ es cerrado en X para todo $A \subset Y$ cerrado. En efecto, supongamos que $A = V(S)$, entonces

   $$x \in \varphi^{-1}(A) \iff \varphi(x) \in A \iff \forall f \in S, (f \circ \varphi)(x) = 0 \iff \forall g \in \varphi^*(S), g(x) = 0$$

   por tanto $\varphi^{-1}(A) = V(\varphi^*(S))$ cerrado de Zariski.

2. Pruebe que cualquier permutación de elementos de un cuerpo k es un mapa continuo de $\mathbb{A}^1$ a sí mismo en la topología de Zariski de $\mathbb{A}^1$. Deducir que si $k = \mathbb{C}$ entonces hay mapeos de Zariski continuos de $\mathbb{A}^1$ a sí mismo que no son polinomios.

   Solución: En efecto, vimos en el ejemplo 4.1.58 del apunte que los cerrados de $\mathbb{A}^1$ son exactamente los conjuntos finitos, k y $\varnothing$. Si σ es una permutación de $\mathbb{A}^1$, entonces, claramente, $\sigma^{-1}(S)$ es finito para todo S finito, es decir, preimagen de un cerrado es cerrado, por tanto σ es continua. En efecto, una permutación de $\mathbb{A}^1$ no es más que una función biyectiva de $\mathbb{A}^1$ en $\mathbb{A}^1$ y claramente existen funciones biyectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que no son polinomios.

3. Sean X e Y espacios topológicos (por ejemplo un conjunto algebraico afín con la topología de Zariski) y sea $f : X \to Y$ una función continua. Pruebe que si X es irreducible entonces $f(X)$ es irreducible.

   Solución: Sea $f : X \to Y$ continua y $A \subset X$ irreducible. Si $B := f(A)$ no es irreducible, entonces hay dos cerrados F_1, F_2 con $F_1 \neq B, F_2 \neq B$. Ahora la igualdad $A = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$ contradice que A fuese irreducible, lo que prueba la primera afirmación.

   Sea $A \subset X$ irreducible. Sea $\overline{A}$ la clausura de A, mostraremos que $\overline{A}$ es irreducible. De nuevo, asumamos que $F_1 \cup F_2 = \overline{A}$ son dos cerrados propios. Entonces $F_1' := F_1 \cap A$ y $F_2' := F_2 \cap A$ son pro definición subconjuntos cerrados propios de A, esto muestra que A no era irreducible, lo cual es de nuevo una contradicción.

4. Pruebe que si $A \subset X$ con X espacio topológico, entonces la colección $T = \{O \cap A,\ O \text{ abierto en } X\}$ es una topología en A, llamada la topología inducida. Pruebe que en esta topología $C \subset A$ es cerrado si y solo si existe $F \subset X$ cerrado con $C = F \cap A$.

   Solución: Para lo primero basta checkear que $\varnothing, A \in T$ y que T es estable bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas, todo esto es sencillo de hacer.

Para lo segundo, notemos que si $C = F \cap A$ entonces el complemento de C en A es $A \backslash F = A \cap F^c$ que es la intersección de A con un abierto de X, así que C es cerrado en A. Por otro lado, si $C \subset A$ es cerrado, entonces $A \backslash C$ es abierto en A, por lo que $A \backslash C = A \cap O$ con O abierto de X, por lo que $C = A \backslash O = A \cap O^c$, que es la intersección de A con un cerrado de X.

5. Sean X, Y conjuntos algebraicos afines con la topología inducida por la topología de Zariski de $\mathbb{C}^n$ (cf. Ejercicio propuesto). Pruebe que los morfismos regulares $\varphi : X \to Y$ son continuos en la topología de Zariski.

   Solución: Basta demostrar que si $A \subset Y$ es un cerrado de Y entonces $\varphi^{-1}(A)$ es un cerrado de X. En efecto, como A es cerrado en Y, tenemos que existe un cerrado $F = V(S) \subset \mathbb{A}^n$ con $A = Y \cap F$, por tanto

$$x \in \varphi^{-1}(A) \Longleftrightarrow \varphi(x) \in A \Longleftrightarrow \varphi(x) \in F \Longleftrightarrow f(\varphi(x)), \forall f \in S$$

   Pero notemos que $\{f \circ \varphi, f \in S\}$ es una colección de polinomios (si somos muy rigurosos, es más bien que $f \circ \varphi$ tienen fórmulas polinomiales y por tanto los identificamos con polinomios), por lo que $\varphi^{-1}(A)$ es cerrado.

6. Sea X un espacio topológico no-vacío. Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto no-vacío, dotado de la topología inducida (o topología traza). Demuestre que Y es irreducible si y sólo si la adherencia $\bar{Y}$ es irreducible.

   Solución: Sea $A \subset X$ irreducible. Sea $\overline{A}$ la clausura de A, mostraremos que $\overline{A}$ es irreducible por contrarrecíproco. Asumamos que $F_1 \cup F_2 = \overline{A}$ con $F_1, F_2 \subset \overline{A}$ dos cerrados propios de $\overline{A}$, es decir $F_i = C_i \cap \overline{A}$ con C_i cerrado en X y $F_i \subsetneq \overline{A}$ (en particular F_i es cerrado en X por ser intersección de cerrados en X). Definamos $F_1' := F_1 \cap A = C_1 \cap A$ y $F_2' := F_2 \cap A = C_2 \cap A$ entonces

   a) F_i' es cerrado en A, puesto que $F_i' = F_i \cap A = C_i \cap \overline{A} \cap A = C_i \cap A$.

   b) F_i' es subconjunto propio de A, pues sino, tendríamos $F_i' = F_i \cap A = A$ y por tanto $A \subset F_i \subsetneq \overline{A}$, con F_i cerrado en X, pero esto es imposible esto muestra que A no era irreducible, lo cual es una contradicción.

   de esta forma, $A = F_1' \cup F_2'$ con los F_i' cerrados propios, por lo que A no sería irreducible.

7. Considere la variedad afín definida por $X = V\left(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y\right) \subseteq \mathbb{A}^3$.

   a) Demuestre que el mapa $\varphi : \mathbb{A}^1 \to X$ definido por $\varphi(t) = \left(t^3, t^4, t^5\right)$ es un morfismo sobreyectivo. Indicación: Para la sobreyectividad, si $(x, y, z) \neq (0,0,0)$, considere $t = y/x$.

   b) Describa el morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras correspondiente al pullback de funciones regulares $\varphi^* : \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}\left(\mathbb{A}^1\right)$.

   c) Demuestre que φ no es un isomorfismo.

   Demostración:

   a) Dado que φ es una función polinomial, lo único que se debe verificar es que $\varphi(t) \in X$ para todo $t \in \mathbb{A}^1$. Para ello basta notar que si $x = t^3, y = t^4, z = t^5$ entonces $xz = \left(t^3\right)\left(t^5\right) = t^8 = y^2, yz = \left(t^4\right)\left(t^5\right) = t^9 = x^3$ y $x^2y = \left(t^6\right)\left(t^4\right) = t^{10} = z^2$. Veamos ahora la sobreyectividad. Si $(x, y, z) = (0,0,0)$ entonces $t = 0$ verifica $\varphi(t) = (0,0,0)$ así que podemos suponer $(x, y, z) \neq (0,0,0)$. De las ecuaciones podemos ver que esto implica $x \neq 0$, y considerando $t = \frac{y}{x}$ tenemos

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y^3}{x^3}, \frac{y^4}{x^4}, \frac{y^5}{x^5}\right) = \left(\frac{xyz}{yz}, \frac{x^2z^2}{xyz}, \frac{x^2yz^2}{x^2yz}\right) = \left(x, \frac{xz}{y}, z\right) = (x, y, z)$$

   b) Dado que el pullback de funciones regulares está definido simplemente por precomposición por φ, este vendrá dado por la fórmula:

$$\varphi^* : \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}\left(\mathbb{A}^1\right), \quad f(x, y, z) \mapsto f\left(t^3, t^4, t^5\right)$$

c) Basta con notar que el pullback φ no es un isomorfismo, pues sabemos que $X \cong \mathbb{A}^1$ si y sólo si $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}\left(\mathbb{A}^1\right)$. En este caso, φ^* no es sobreyectivo, pues cualquier polinomio no-constante en su imagen es de grado $\geqslant 3$. En particular $T \in \mathscr{O}\left(\mathbb{A}^1\right)$ no posee preimagen por φ^*.

8. Sea X variedad afín en $\mathbb{A}^n$ y sea $f \in \mathscr{O}(X)$. Defina $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

   a) Demuestre que X_f es un conjunto abierto de Zariski en X (estos conjuntos se conocen como abiertos principales de X)

   b) Sea J el ideal en $k\left[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right]$ generado por $\mathcal{I}(X)$ y $x_{n+1}f - 1$, y sea $Y = V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Muestre que la proyección $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n$ en las primeras n coordenadas es un morfismo biyectivo de Y a X_f (por lo que el abierto principal X_f en X puede ser identificado como un conjunto cerrado en algún espacio afín (más grande)).

   c) Muestre que los abiertos principales de X constituyen una base de la topología.

   d) Demuestre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ es un conjunto algebraico afín abierto en $\mathbb{A}^{n^2}$, y que puede verse como un conjunto algebraico afín cerrado en $\mathbb{A}^{n^2+1}$.

Demostración:

   a) Por definición $V(\langle f \rangle)$ es un cerrado de Zariski de $\mathbb{A}^n$, y entonces $\mathbb{A}^n \backslash V(\langle f \rangle)$ es un abierto. Luego, como $X_f = X \cap (\mathbb{A}^n \backslash V(\langle f \rangle))$ por definición de la topología inducida X_f es abierto de X.

   b) Notar que como $J = \langle I(X), x_{n+1}f - 1\rangle$, tenemos:

$$Y = \left\{(x,t) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 : g(y) = 0 \quad \forall g \in I(X), f(x)t = 1\right\} = \left\{\left(x, \frac{1}{f(x)}\right) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 : x \in X\right\}$$

   y por lo tanto la proyección $\pi : Y \to X_f, (x,t) \mapsto x$ es un morfismo biyectivo pues tiene inversa $i : X_f \to Y, x \mapsto \left(x, \frac{1}{f(x)}\right)$ (que, de hecho, no es polinomial).

   c) El hecho que una colección de abiertos constituya una topología de X significa que todo abierto se puede expresar como unión de ellos. Por lo tanto consideramos $U \subseteq X$ abierto y veamos que existe $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tal que $U = \bigcup_{i=1}^m X_{f_i}$. Tenemos entonces que si U es un abierto de X, entonces $X \backslash U$ es un cerrado y por lo tanto $I(X \backslash U)$ es un ideal de $\mathscr{O}(X)$. Ahora, como $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \backslash \mathrm{Im}(X)$ es cociente de un anillo noetheriano es también noetheriano y por tanto el ideal $\mathfrak{I}(X \backslash U) = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ es finitamente generado. Tenemos entonces que:

$$U = X \backslash V(\mathrm{Im}(X \backslash U)) = X \backslash V(f_1, \ldots, f_m) = X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^m V_{f_i}\right) = \bigcup_{i=1}^m X_{f_i}$$

   d) Notar que, viendo a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dentro de $\mathbb{A}^{n^2}$ podemos caracterizarlo como:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{A}^{n^2} : \det(A) \neq 0\right\} = \mathbb{A}^{n^2} \backslash V(\ \det\ )$$

   y por lo tanto $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ corresponde a un abierto de Zariski puesto que $\det : \mathbb{A}^{n^2} \to \mathbb{C}$ es una función polinomial de las entradas de la matriz y por tanto define una función regular en $\mathbb{A}^{n^2}$. Dado que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puede ser definido por una sola ecuación corresponde a un abierto principal de $\mathbb{A}^{n^2}$ y por la parte (b) está en biyección con un cerrado de $\mathbb{A}^{n^2+1}$.

9. Sea V un conjunto algebraico afín en $\mathbb{A}^n$ sobre $k = \mathbb{C}$.

   a) Probar que los morfismos regulares en $\mathbb{C}$ son continuos en la topología inducida por la norma.

   b) Probar que $V \subset \mathbb{C}^n$ es un conjunto cerrado en la topología inducida por la norma (así que los cerrados de Zariski de $\mathbb{A}^n$ sobre $\mathbb{C}$ también son cerrados en la topología usual).

c) De un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{A}^n$ cerrado en la topología de la norma pero que no sea cerrado en la topología de Zariski. (Así la topología incuida por la norma es más fina que la de Zariski. Más informalmente, la topología de Zariski tiene muy pocos cerrados)

Solución:

a) Las funciones polinomiales son continuas con respecto a la topología de $\mathbb{C}$ en la llegada, además un morfismo regulares es polinomial coordenada a coordenada, así que es continuo en la topología producto de $\mathbb{A}^n$, que coincide con la topología de la norma de $\mathbb{A}^n$ (cf. MAT023 o MAT225).

b) En efecto, si V está dado por los ceros de polinomios $f_1, \ldots, f_n$, entonces $V = \bigcap f_i^{-1}(0)$, pero los polinomios son funciones continuas en la topología de Zariski y los singletons son cerrados en la topología de Zariski (y también en la topología de la norma), así que V es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados.

c) Basta tomar $n = 1$ y cualquier subconjunto propio infinito de $\mathbb{A}^1$. (cf. Ejemplo 4.1.58. del apunte).

10. Pruebe que si $\varphi : V \to W$ es un morfismo sobreyectivo entonces su pullback $\varphi^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ es inyectivo. De un contraejemplo del recíproco.

Solución: En efecto, si $\varphi^*(f) = \varphi^*(g)$ entonces $f \circ \varphi = g \circ \varphi$, pero como φ es sobreyectivo, admite una inversa por la derecha Φ, componiendo por la derecha con esta función tenemos $f = g$, así que φ^* es inyectivo. Para el contraejemplo consideremos $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$ con $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 | \ xy = 1\}$, este no es sobreyectivo pues $\varphi(x, y) = 0 \implies x = 0 \implies xy \neq 0$. Sin embargo, el pullback es $\varphi^* : (\mathbb{A}^1) = k[x] \to \mathcal{O}(X) = k[x, y]/\langle xy - 1\rangle$, el cual mapea el 1 al 1 (por ser un morfismo de k-álgebras) y mapea x a x. Claramente $\varphi^*(f) \neq 0$ para todo $f \neq 0$, así que φ^* es inyectivo.

11. Pruebe que si $\varphi^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ es sobreyectivo entonces el morfismo asociado $\varphi : V \to W$ es inyectivo. De un contraejemplo del recíproco.

Solución: Asumamos que φ^* es sobreyectivo y probemos que f es inyectivo. Sean $x_1, x_2 \in X$ dos puntos con $y := f(x_1) = f(x_2)$. Asumamos que $x_1 \neq x_2$, entonces hay alguna función (por ejemplo, la restricción de la función proyección a la i-ésima coordenada) $\varphi \in A(X)$ con $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Sin embargo, φ^* es sobreyectiva, así que hay algún $\psi \in A(Y)$ con $\varphi^*(\psi) = \varphi$. Esto implica que

$$\psi(y) = \psi(f(x_1)) = f^*(\psi)(x_1) = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = f^*(\psi)(x_2) = \psi(f(x_2)) = \psi(y),$$

lo cual es una contradicción rotunda. Debemos tener $x_1 = x_2$.

Para el contraejemplo consideremos

$$X = \mathbb{A}^1, Y = V(x^2 - y^3)\varphi : X \to Y, t \to (t^3, t^2)\varphi^* : A(Y) \to A(X), (\bar{x}, \bar{y}) \to (t^3, t^2)$$

Aquí φ es biyectiva pero φ^* no es sobreyectiva, dado que no mapea nada a t.

12. Sea V un conjunto algebraico finito de $\mathbb{A}^n$. Si V tiene m puntos, probar que $\mathcal{O}(V)$ es isomorfo como k-álgebra a k^m. (Usar teorema chino del resto).

Solución: Sea $V = \{a_i\}_{i \in I}$ con $I = \{1, \ldots, m\}$ conjunto algebraico afín finito de $\mathbb{A}^n$. Sea $a \in V$ sabemos que $\mathcal{I}(a) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle$. Notemos que $\mathcal{I}(a) + \mathcal{I}(b) = \mathbb{A}[x_1, \ldots, x_n]$ esto pues si $a_j \neq b_j$ entonces $x - a_j - (x - b_j) = b_j - a_j \in k^\times$ por lo que $1 \in \mathcal{I}(a) + \mathcal{I}(b)$. Así, como $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(\bigcup\{a_i\}_{i \in I}) = \bigcap \mathcal{I}(a_i)$ por el Teorema Chino del Resto obtenemos $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(a_1) \cap \cdots \cap \mathcal{I}(a_m) \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(a_1) \times \cdots \times k[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(a_m) \simeq k^m$. Además, estos podemos verificar (ver por ejemplo la demostración del Teorema Chino del Resto) que estos morfismos de anillos son también claramente morfismos de k-álgebras.

13. Sea V cualquier línea en $\mathbb{R}^2$. (El cero de un polinomio lineal no constante $ax + by - c$). Probar que como $\mathbb{R}$-álgebras, $\mathcal{O}(V)$ es isomorfo a $\mathbb{R}[x]$ y describa el isomorfismo correspondiente de V a $\mathbb{A}^1$.

Solución: Si $b \neq 0$,

$$\Phi : \mathbb{R}[x,y] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[x], \quad y \mapsto (c-ax)b^{-1}, \quad x \mapsto x$$

es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras sobreyectivo de kernel $\mathcal{I}(V)$, así que induce el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras pedido por Noether, además induce el isomorfismo $\varphi : \mathbb{A}^1 \to V \subset \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t, (c-at)b^{-1})$ que cumple $\varphi^* = \Phi$.

Si $b = 0$ y $a \neq 0$ entonces

$$\Phi : \mathbb{R}[x,y] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[x] \quad y \mapsto x \quad x \mapsto c/a$$

es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras sobreyectivo de kernel $\mathcal{I}(V)$ así que induce, por Noether, el isomorfismo pedido, también induce el isomorfismo $\varphi : \mathbb{A}^1 \to V \subset \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (c/a, t)$ que cumple $\varphi^* = \Phi$.

14. Suponga que $\varphi : V \to W$ es un morfismo de variedades algebraicas afines. Si W' es una variedad algebraica afín de W ($W' \subset W$) probar que la preimagen $V' = \varphi^{-1}(W')$ de W' en V es una variedad algebraica afín contenida en V. Si $W = V(I)$ mostrar que $V' = V(\tilde{\varphi}(I))$ para el morfismo $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$.

    Solución: En efecto, sea $x \in V' = \varphi^{-1}(W')$ arbitrario, tenemos

    $$x \in V' \iff \varphi(x) \in W' = V(I) \iff \forall f \in I, (f \circ \varphi)(x) = 0 \iff \forall g \in \varphi^*(I), g(x) = 0$$

15. Suponga que $V \subset \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín y $f \in \mathcal{O}(V)$. El grafo de f es la colección de puntos $\{(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n))\} \in \mathbb{A}^{n+1}$ con $(a_1, \ldots, a_n) \in V$. Probar que el grafo de f es una variedad algebraica afín isomorfa a V.

    Solución: Como $\pi : \mathrm{Gr}(f) \to V$, $(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n)) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ es polinomial y es la restricción de una función polinomial en todo $\mathbb{A}^{n+1}$, por el ejercicio anterior, tenemos que $\mathrm{Gr}(f)$ es variedad algebraica afín. Además, así, π es isomorfismo.

2. Propuestos

1. Probar que la topología producto en $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1$ y la topología de Zariski en $\mathbb{A}^n$ no coinciden (para $n \geqslant 2$) ¿Es una más fina que la otra?