Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 7 MAT214

7 de mayo 2024

Mateo Hidalgo

1. Ejercicios

1. Sea A un anillo. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

   (1) A es Noetheriano.

   (2) Todo conjunto no vacío de ideales de A contiene un ideal que es maximal el sentido de la inclusión.

   (3) Todo ideal de A es finitamente generado.

   Solución: [(1) implica (2)] Asuma que A es Noetheriano y sea Σ una colección no vacía de ideales de A. Escoger cualquier $I_1 \in \Sigma$. Si M_1 es maximal con respecto a la inclusión en Σ, entonces (2) se cumple, así que asumamos que I_2 no es maximal. Entonces hay algún $M_2 \in \Sigma$ tal que $M_1 \subset M_2$. Si M_2 es maximal en Σ, (2) se cumple, así que podemos asumir que hay un $M_3 \in \Sigma$ propiamente conteniendo a M_2. De esta forma vemos que si (2) falla, podemos producir por el axioma de elección una cadena creciente infinita de elementos de Σ, contradiciendo (1).

   [(2) implica (3)] Asuma que (2) es cierto y sea I un ideal de A. Sea Σ la colección de todos los ideales finitamente generados de A. Dado que $\{0\} \in \Sigma$, esta colección es no vacía. Por (2) Σ contiene un elemento maximal I'. Si $I' \neq I$, sea $x \in I - I'$. Dado que $I' \in \Sigma$, el ideal I' es finitamente generado por hipótesis, por tanto el ideal generado por I' y x es finitamente generado. Esto contradice la maximalidad de I', entonces $N = N'$ es finitamente generado.

   [(3) implica (1)] Asuma que (3) se cumple y sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \ldots$ una cadena de ideales de M. Sea

   $$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$$

   y notar que N es un ideal (ejercicio, análogo a espacios vectoriales/grupos mostrado en la Ayudantía 2). Por (3) N es finitamente generado por, digamos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dado que $a_i \in N$ para todo i, cada a_i vive en uno de los ideales de la cadena, digamos M_{j_i}. Sea $m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$. Entonces $a_i \in M_m$ para todo i así que el ideal que generan está contenido en M_m, es decir, $N \subseteq M_m$. Esto implica que $M_m = N = M_k$ para todo $k \geqslant m$, lo cual prueba (1).

2. Muestre que si I es un ideal propio de un anillo A Noetheriano entonces hay ideales primos $P_1, \ldots, P_n$ conteniendo a I tales que $P_1 \cdots P_n \subset I$

   Solución: Consideremos la colección $\mathcal{S}$ de ideales de A que no contienen un producto finito de ideales primos. Por el ejercicio anterior, existe un ideal $I \in \mathcal{S}$ que es maximal en $\mathcal{S}$. De esta forma, como $I \in \mathcal{S}$, I no puede ser primo, por tanto existen $j, k \in A - I$ tales que $jk \in I$. Notemos que los ideales $J = j + I, K = k + I$ contienen entonces a I propiamente (por lo que, por maximalidad, $J, K \notin \mathcal{S}$)y que $(\langle j \rangle + I)(\langle k \rangle + I) \subset I$ pues $jk \in I$. Pero como $J, K \notin \mathcal{S}$, tenemos que contienen producto finito de ideales primos y por tanto I también.

3. Sean I y J ideales en el anillo A. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $I^k \subseteq J$ para algún $k \geqslant 1$ entonces $\operatorname{rad} I \subseteq \operatorname{rad} J$.

   b) Si $I^k \subseteq J \subseteq I$ para algún $k \geqslant 1$ entonces $\operatorname{rad} I = \operatorname{rad} J$.

   c) $\operatorname{rad}(IJ) = \operatorname{rad}(I \cap J) = \operatorname{rad} I \cap \operatorname{rad} J$.

   d) $\operatorname{rad}(\operatorname{rad} I) = \operatorname{rad} I$.

   e) $\operatorname{rad} I + \operatorname{rad} J \subseteq \operatorname{rad}(I + J)$ y $\operatorname{rad}(I + J) = \operatorname{rad}(\operatorname{rad} I + \operatorname{rad} J)$.

   Solución:

   a) Sea $x \in \operatorname{rad} I$. Tenemos entonces $x^m \in I$ para algún $m \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, por lo que $(x^m)^k = x^{mk} \in J$, por tanto $x \in \operatorname{rad} J$.

   b) Por lo anterior, basta probar $\operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} I$. Pero esto es inmediato del ejercicio anterior, con $k = 1$ y los roles de I y J intercambiados.

   c) Probaremos las inclusiones $\operatorname{rad} IJ \subset \operatorname{rad} I \cap J \subset \operatorname{rad} I \cap \operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} IJ$. En efecto, las primeras dos contenciones se tienen usando el primer ejercicio en virtud de las inclusiones $IJ \subset I \cap J$ y $I \cap J \subset I$, $I \cap J \subset J$. Si $x \in \operatorname{rad} I \cap \operatorname{rad} J$ entonces $x^k \in I, x^m \in J$ para algunos $k, m \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Por tanto $x^k x^m = x^{k+m} \in IJ$ así que $x \in \operatorname{rad} IJ$. De esta forma $\operatorname{rad} I \cap \operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} IJ$ y concluimos lo pedido.

   d) Ya sabemos que $J \subset \operatorname{rad} J$, para J ideal arbitrario, así que en particular $\operatorname{rad} I \subset \operatorname{rad} \operatorname{rad} I$. Basta probar entonces la otra inclusión. Sea $x \in R$ tal que $x^m \in \operatorname{rad} I$ para algún $m \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, tenemos entonces que $(x^m)^k \in I$ para algún $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, por tanto $x^{mk} \in I$, así que $x \in \operatorname{rad} I$, justo como se quería.

   e) La primera inclusión pedida se deduce del hecho que $I \subset I + J, J \subset I + J$ y el uso del primer ítem. Para mostrar la igualdad usemos el segundo ítem. Basta mostrar que $(\operatorname{rad} I + \operatorname{rad} J)^k \subset I + J$ para algún $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Sea $x \in \operatorname{rad} I$, $y \in \operatorname{rad} J$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ tal que $x^n \in I$, $y^m \in J$. Tenemos que, por teorema del Binomio de Newton $(x + y)^{n+m-1}$ puede escribirse como suma de potencias de la forma $x^i y^j$, tal que $i + j = n + m - 1$. Notamos que si $i \geqslant n$ tenemos $x^i y^j \in I$ y si tenemos $i < n$ entonces $j > m-1$ así que $x^i y^j \in J$. Concluimos que $(x+y)^{n+m-1} \in I+J$ por lo que $(\operatorname{rad} I+\operatorname{rad} J)^{n+m-1} \subset I+J$ como se quería.

4. Probar que la intersección de dos ideales radicales es de nuevo un ideal radical.

   Solución: Basta usar el tercer ejercicio del problema anterior. Si I, J son ideales radicales, entonces $I \cap J = \operatorname{rad} I \cap \operatorname{rad} J = \operatorname{rad}(I \cap J)$, por tanto $I \cap J$ es radical.

5. Probar que el converso del Teorema de la base de Hilbert.

   Solución: Notemos que $I_j \subsetneq I_{j+1}$ ideales en A entonces $\langle x, I_j \rangle_{R[x]} \subsetneq \langle x, I_{j+1} \rangle_{R[x]}$.

   Sea $I \subseteq A$ un ideal. Entonces $J := I + XA[X] \subseteq A[X]$ es un ideal finitamente generado, digamos $J = \langle p_0, \ldots, p_n \rangle$. Ahora sea $a_i = p_i(0) \in R$ para $0 \leqslant i \leqslant n$. Tenemos $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \subseteq I$ por definición de J. Ahora sea $a \in I$. Entonces para algún $f_i \in A[X]$ tenemos

   $$a = \sum_{i=0}^{n} f_i p_i$$

   lo cual, evaluado en 0 da

   $$a = \sum_{i=0}^{n} f_i(0) a_i \in \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$$

   Por tanto $I = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ y I es finitamente generado.

6. Muestre que los siguientes anillos no son Noetherianos exhibiendo una cadena infinita ascendente de ideales:

   a) El anillo de funciones continuas reales en $[0, 1]$.

b) El anillo de funciones desde un conjunto finito X hacia $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solución:

a) Basta considerar la cadena $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $I_n = \langle x^1, \ldots, x^{1/n}\rangle$. Pues

$$x^{1/m} = xf_1 + \cdots + x^{1/n} f_n \implies 1 = x^m(x_1 f_1 + \cdots + x^{1/n} f_n)$$

pero el lado derecho evaluado en 0 es 0.

b) Basta considerar $I_n = \{f : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ con } f(x_m) = 0, \forall m \leqslant n\}$

7. Pruebe que el cuerpo $k(x)$ no es una k-álgebra finitamente generada.

Solución: La clave es que con finitos generadores no podemos formar todos los elementos de la familia $\{1/f\}$ con los $f \in A[x]$ polinomios irreducibles. Si k es infinito basta considerar $\{1/(x-a)\}_{a\in k}$. Si k es finito consideramos por contradicción que hay finitos polinomios irreducibles, $p_1, \ldots, p_n$ entonces $p_1 \ldots p_n + 1$ no es divisible por ningún p_i así que es irreducible distinto de los $p_1, \ldots, p_n$.

8. Defina el conjunto $A[[x]]$ de series de potencias formales (en la indeterminada x) con coeficientes en A como todas las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Defina la adición y multiplicación de series de potencias en la misma manera que para series con coeficientes reales o complejos, es decir, extendiendo la adición y multiplicación de polinomios a series como si fuesen polinomios de "grado infinito".

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

(El término "formal" es usado aquí para indicar que la convergencia no es tenida en cuenta, así que las series de potencias no tienen por qué representar funciones en A.)

a) Probar que $A[[x]]$ es un anillo conmutativo con unidad.

b) Muestre que $1 - x$ es una unidad en $A[[x]]$ con inverso $1 + x + x^2 + \cdots$.

c) Probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una unidad en $A[[x]]$ si y solo si a_0 es una unidad en A.

Solución:

a) Todo es trivial menos que la multiplicación es asociativa. Debemos probar que dadas series de potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i, \sum_{i=0}^{\infty} c_i$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} b_i c_{n-k-i}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) c_{n-k}.$$

La igualdad se tiene pues en cambos casos estamos calculando la suma de los $a_j b_k c_m$ con $j + k + m = n$.

b) Directo.

c) Si $\sum a_n x^n \in A[[x]]^\times$ con inverso $\sum b_n x^n$ entonces $\sum_{k=0}^{n=0} a_k b_{n-k} = 1$, así que $a_0 b_n = 1$ por lo que $a_0 \in A^\times$. Por otro lado, si $a_0 \in A^\times$ entonces definiendo $b_0 := a_0^{-1}$ se cumple $\sum_{k=0}^{n=0} a_k b_{n-k} = 1$. Ahora, supongamos que ya encontramos $b_1, \ldots, b_{n-1}$ para construir la series $\left(\sum a_i x^i\right)^{-1} = \sum b_i x^i$. Queremos que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$. Para esto basta tomar $n := a_0^{-1}(-a_n b_0 - a_{n-1} b_1 - \cdots - a_1 b_{n-1})$.

9. Probar que si A es un dominio entonces $A[[x]]$ es un dominio.

   Solución: Sean $f, g \in A[[x]]$ no nulos. Sea a_n, b_m los coeficientes no nulos de índice más pequeños en las series de f y g respectivamente. Entonces $fg = a_i b_j x^{i+j} + \mathcal{O}(x^{i+j+1}) \neq 0$ donde $\mathcal{O}(x^{i+j+1})$ es una suma de términos de grado mayor o igual a $i + j + 1$.

10. Probar que si k es cuerpo algebraicamente cerrado, entonces k es infinito.

    Solución: Si k tuviese finitos elementos $a_1, \dots, a_n$ entonces el polinomio

    $$f(x) = 1 + \Pi_{i=1}^{n}(x - a_i)$$

    no tiene raíces en k.

11. **Definición**. Un ideal propio Q en el anillo conmutativo A es llamado primario si cuando sea que $ab \in Q$ y $a \notin Q$, entonces $b^n \in Q$ para algún entero positivo n. Equivalentemente, si $ab \in Q$ y $a \notin Q$, entonces $b \in \operatorname{rad} Q$.

    Problema. Sea A un anillo conmutativo con unidad.

    (1) Los ideales primos son primarios.

    (2) El ideal Q es primario si y solo si todo divisor del cero en A/Q es nilpotente.

    (3) Si Q es primario entonces $\operatorname{rad} Q$ es un ideal primo, y es el ideal primo más pequeño conteniendo a Q.

    (4) Si Q es un ideal cuyo radical es un ideal maximal, entonces Q es un ideal primario.

    (5) Suponga que M es un ideal maximal y Q es un ideal con $M^n \subseteq Q \subseteq M$ para algún $n \geqslant 1$. Entonces Q es un ideal primario con $\operatorname{rad} Q = M$.

    Solución: Las primeras dos afirmaciones son inmediatas de la definición. Para (3), supongamos que $ab \in \operatorname{rad} Q$. Entonces $a^m b^m = (ab)^m \in Q$, y dado que Q es primario, o bien $a^m \in Q$, en cuyo caso $a \in \operatorname{rad} Q$, o bien $(b^m)^n \in Q$ para algún entero positivo n, en cuyo caso $b \in \operatorname{rad} Q$. Esto prueba que $\operatorname{rad} Q$ es un ideal primo, y sigue que $\operatorname{rad} Q$ es el ideal primo más pequeño conteniendo Q (cf. Proposición 4.10.40 del apunte).

    Para probar (4) pasamos al anillo cociente A/Q; por (2), basta mostrar que todo divisor del cero en este anillo cociente es nilpotente. Estamos así reducidos a la situación en que $Q = (0)$ y $M = \operatorname{rad} Q = \operatorname{rad}(0)$, el cual es el nilradical, es un ideal maximal. Dado que el nilradical está contenido en todo ideal primo (cf. Proposición 4.10.40 del apunte), sigue que M es el único ideal primo, así que también el único ideal maximal. Si d fuese un divisor del cero, entonces el ideal $\langle d \rangle$ sería un ideal propio, por tanto estaría contenido en un ideal maximal. Esto implica que $d \in M$, por tanto todo divisor del cero es efectivamente nilpotente.

    Finalmente, supongamos $M^n \subseteq Q \subseteq M$ para algún $n \geqslant 1$ donde M es un ideal maximal. Entonces $Q \subseteq M$ así que $\operatorname{rad} Q \subseteq \operatorname{rad} M = M$. Conversamente, $M^n \subseteq Q$ muestra que $M \subseteq \operatorname{rad} Q$, así que $\operatorname{rad} Q = M$ es un ideal maximal, y Q es primario por (4).

12. Probar que para $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \cdots$ (el cual es un anillo booleano cf. Ayudantía 5) cada uno de los siguientes tiene una cantidad infinitas de ideales primos minimales, y que (0) no es la intersección de ningún número finito de ellos

    Solución: En efecto, basta tomar los $I_n = \langle e_n \rangle$ donde e_n es el elemento que tiene un 1 en cada coordenada excepto en la posición n. Tenemos $A/I_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dominio integral así que I_n es primo. Además, notemos que si $P \subset A$ es un ideal, entonces $A/I \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ donde J es algún conjunto de índices. Pero $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ es dominio integral solo si $|J| \leqslant 1$. Es claro entonces que el ideal I_n es primo minimal.

13. Sea I un ideal de un anillo A con $I \neq A$. Decimos que un ideal primo $P \leqslant R$ es minimal sobre I si $I \subset P$ y no hay ideal primo Q con $I \subset Q \subsetneq P$. Probar que siempre existe un ideal primo minimal sobre I.

    Solución: Mostraremos más generalmente que

Dado $P \subseteq A$ un ideal primo y $X \subseteq P$ subconjunto existe un ideal primo minimal (con respecto a la inclusión) contenido en P el cual contiene a X.

La idea es aplicar el lema de Zorn con la relación de orden de contención inversa. Considere el conjunto $S := \{Q \mid Q \text{ es ideal primo de } R, X \subseteq Q \subseteq P\}$ ordenado por la inclusión. Notar que $P \in S$ implica que $S \neq \varnothing$. Considere una cadena $\{Q_i\}_{i\in I}$ en S. Entonces $\bigcap_{i\in I} Q_i$ está en S, así que por el Lema de Zorn existe un elemento minimal en S.

Veamos que $Q := \bigcap_{i\in I} Q_i$ es de hecho primo: sea $ab \in Q$ con $a, b \in R \backslash Q$. Entonces existen índices j, k tales que $a \notin Q_j$, $b \notin Q_k$, digamos $Q_j \supseteq Q_k$. Por tanto $a, b \notin Q_k$, pero $ab \in Q$ implica $ab \in Q_k$, contradiciendo la primalidad de Q_k.

Para deducir lo pedido basta tomar $X = 0$.

2. Propuestos

1. Probar que si A es Noetheriano entonces $A[[x]]$ es Noetheriano