Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 6 MAT214

30 de abril 2024

Mateo Hidalgo

1. Ejercicios

1. Asuma que R es conmutativo. Sean I y J ideales de R y asuma que P es ideal primo de R que contiene a IJ (por ejemplo, si P contiene a $I \cap J$). Probar que o bien $I \subset P$ o bien $J \subset P$.

   Solución: Por contradicción supongamos que existe $i \in I$ y existe $j \in J$ tales que $i, j \notin P$. Tenemos por definición que $ij \in IJ \subset P$, por definición de ideal primo o bien $i \in I$ o bien $j \in J$, contradicción.

2. Sea R un anillo (que no necesariamente tendría que ser conmutativo).

   a) Sean $I_1, \ldots, I_n \trianglelefteq R$, y sea $P \trianglelefteq R$ un ideal primo. Si $P \supset I_1 \cap \cdots \cap I_n$, pruebe que $P \supset I_k$ para algún $k = 1, \ldots, n$.

   b) Demuestre el Prime Avoidance Lemma. Sea A un anillo (no necesariamente conmutativo) y sea I un subconjunto no vacío de A cerrado por adición y multiplicación (por ejemplo, un ideal). Sea $P = \{P_1 \ldots, P_n\}$ un conjunto de ideales de A en que a lo más dos de ellos no son primos (el lema comunmente es usado con todos los P_i primos) entonces

   $$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

   implica que $\exists k$ tal que $I \subseteq P_k$.

   Solución:

   a) Por contradicción supongamos que para todo $k = 1, \ldots, n$ existe $i_k \in I_k$ con $i_k \notin P$. Notemos que $I_1 \ldots I_n \subset I_1 \cap \cdots \cap I_n$, por tanto $i_1 \ldots i_n \in I_1 \ldots I_n \subset I_1 \cap \cdots \cap I_n \subset P$. Como P es un ideal primo tenemos o bien $i_1 \in P$ o bien $i_2 \ldots i_n \in P$, repitiendo este argumento iterativamente tenemos que $i_k \in I_k$ para algún $k = 1, \ldots, n$, contradicción.

   b) Procedemos por inducción en n. El caso $n = 1$ es claro. Ahora asuma que I no está contenido en $(\bigcup_{i=1}^{n} P_i) \backslash P_k = Q_k$ para ningún k (de otra forma, podemos usar la hipótesis inductiva). Sea $x_k \in I \backslash Q_k$. Notar que esto significa que x_k pertenece a P_k y no pertenece a ningún P_i, $i \neq k$.

   Caso 1: $n = 2$. Sea $y = x_1 + x_2 \in I \subset P_1 \cup P_2$. Si $y \in P_1$, como $x_1 \in P_1$ obtenemos que $x_2 \in P_1$, una contradicción.

   Caso 2: $n > 2$. Sin pérdida de generalidad, sea P_1 primo. Definamos $z = x_1 + x_2 \cdots x_n \in I$. Entonces $z \notin P_1$ ya que si $x_2, \ldots, x_n \notin P_1$ entonces el producto $x_2 \cdots x_n$ no pertenece a P_1. De hecho, $x_i \in P_i$ para todo $i \geqslant 2$, así que $z - x_1 \in P_i$ para $i \geqslant 2$. Pero dado que $x_1 \notin P_i$ para $i \geqslant 2$ debemos tener también $z \notin P_i$ para $i \geqslant 2$, una contradicción ya que $z \in I$.

   Por tanto, no podíamos elegir los elementos $x_k \in I \backslash Q_k$ y por tanto $I \subset Q_k$, por lo que uno de los P_i aparecía redundantemente en la unión, al removerlo estamos en el caso de $n - 1$ ideales y podemos usar la hipótesis inductiva. Concluyendo.

3. Demostrar que si A es un dominio integral entonces $A[X]$ también lo es.

   Solución: Si p y q son polinomios no nulos de $A[X]$ con términos principales $a_n x^n$ y $b_m x^m$ $(a_n, b_m \neq 0)$, respectivamente, entonces el término principal de pq es $a_n b_m x^{m+n}$ con $a_n b_m \neq 0$, así que $pq \neq 0$ y concluimos que $A[X]$ es dominio integral.

4. Sea I un ideal del anillo R y denotemos por $(I) = I[X]$ al ideal de $R[X]$ generado por I (el conjunto de polinomios con coeficientes en I). Entonces

$$R[X]/(I) \cong (R/I)[X].$$

   En particular, si I es un ideal primo de R entonces (I) es un ideal primo de $R[X]$.

   Solución: Hay un mapa natural $\varphi : R[X] \to (R/I)[X]$ dado por enviar un polinomio en $R[X]$ hacia el polinomio con sus coeficientes módulo I. La definición de adición y multiplicación en el anillo muestran automáticamente que φ es un morfismo de anillos. El kernel es precisamente el conjunto de polinomios en que cada coeficiente es un elemento de I, lo cual es lo mismo que decir que $\ker\varphi = I[X] = (I)$, probando la primera parte de la proposición. Si I es un ideal primo en R, entonces R/I es dominio integral, por tanto $(R/I)[X]$ es un dominio integral por el ejercicio anterior. Esto muestra que si I es un ideal primo de R, entonces (I) es un ideal primo de $R[X]$.

   Notar que no es cierto que si I es maximal en R entonces (I) es maximal en $R[X]$. Sin embargo, (ejercicio) si I es maximal en R entonces el ideal de $R[X]$ generado por I y x es maximal en $R[X]$.

5. Sea R un anillo tal que para todo $a \in R$ hay un número natural $n > 1$ con $a^n = a$.

   a) Mostrar que todo ideal primo de R es maximal.

   b) Dar un ejemplo de un anillo que cumpla la hipótesis (que no sea un cuerpo o el anillo $R = \{0\}$).

   Solución:

   a) Sea $P \trianglelefteq R$ un ideal primo. Mostremos que R/P es un cuerpo. En efecto, sea $[r] \in R/P$ no-nulo entonces como $r^n = r$ (para algún $n > 1$) tenemos $[r]^n = [r]$, por tanto

$$[r]^n - r = 0 = [r]([r]^{n-1} - 1)$$

   así que, como estamos en el dominio integral R/P y $r \neq 0$ tenemos $[r]^{n-1} = 1$, por tanto el inverso de $[r]$ es $[r]^{n-2}$ y R/P es un cuerpo (todo elemento no-nulo tiene inverso multiplicativo).

   b) $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

6. Sean P y Q ideales en un anillo R, y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si P y Q son coprimos (en particular, si P y Q son ideales maximales distintos) mostrar que P^n y Q^m son coprimos.

   Solución: Notemos que $P + Q$ es un ideal que contiene al ideal maximal P pero con $P \subsetneq P + Q$ así que $P + Q = R$. Entonces tenemos $a + b = 1$ para algunos $a \in P, b \in Q$. Escribamos $a^n + (a - a^n) + b = 1$. Si $a - a^n$ está en Q entonces para $b' = a - a^n$ tenemos $a^n + b' = 1$, así que $P^n + Q = R$. Pero de hecho, como $a - a^n = a(1 - a^{n-1})$ es divisible por $1 - a = b \in Q$, así que efectivamente está en Q. De la igualdad $P^n + Q = R$ sigue que $P^n + Q^m = R$ repitiendo el argumento anterior.

2. Propuestos

1. Sea M un conjunto infinito.

   a) Use el lema de Zorn para mostrar que M puede ser escrito como una unión disjunta de conjunto todos contablemente infinitos.

b) Muestre que para cualquier conjunto no-vacío de cardinal a lo más numerable A hay una biyección entre M y $M \times A$.

2. *a*) Mostrar que todo espacio vectorial tiene una base (incluso si el espacio no es finitamente-generado).

   b) Sean $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ con $n \neq m$. Por supuesto, sabemos que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son isomorfos como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Sin embargo, pruebe que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son isomorfos como grupos (con la adición estándar). (Hint: Considere a $\mathbb{R}^n$ y a $\mathbb{R}^m$) como espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$ y use el ejercicio anterior.