Examen Estructuras Algebraicas

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Cristóbal Montecino

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

No olviden **justificar adecuadamente sus respuestas**.

Problema 1 (50 puntos): Grupos y representaciones

(a) **(15 pts)** Clasificar todos los grupos abelianos de orden $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ módulo isomorfismo.

(b) **(20 pts)** Sean G y H dos grupos finitos, y sean

$$\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V) \text{ y } \rho_W : H \to \mathrm{GL}(W)$$

representaciones irreducibles. Probar que

$$\rho : G \times H \to \mathrm{GL}(V \otimes W),\ (g,h) \mapsto \rho_V(g) \otimes \rho_W(h)$$

es irreducible.[1]

(c) **(15 pts)** Determinar la tabla de caracteres del grupo $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

Problema 2 (50 puntos): Anillos y módulos

Todos los anillos serán conmutativos con unidad.

(a) **(15 pts)** Probar que todo dominio de integridad *finito* A (i.e., tal que A es un conjunto finito) es un cuerpo.
Indicación: Dado $a \neq 0$, considerar la sucesión $\{a, a^2, a^3, \dots\} \subseteq A$.

(b) **(20 pts)** Sea $\mathscr{C} := \mathscr{C}^0([0,1];\mathbf{R})$ el anillo de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbf{R}$, y sea

$$I := \left\{ f \in \mathscr{C} \text{ tal que para todo } m \in \mathbf{N} \text{ se tiene que } \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} = 0 \right\}.$$

Probar que I es un ideal de $\mathscr{C}$ y que $\sqrt{I} = I$.
Indicación: Recordar que si $g \in \mathscr{C}$, entonces existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq g(x) \leq M$ para todo $x \in [0,1]$.

(c) **(15 pts)** Sean M y N dos A-módulos, y sea $\varphi : M \to N$ un morfismo A-lineal. Probar que si $\varphi : M \to N$ es un isomorfismo entonces, para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, el morfismo inducido a nivel de localizaciones

$$\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}},\ \frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$$

es un isomorfismo.
Indicación: Considerar la sucesión exacta asociada a φ que involucra $\ker(\varphi)$, M, N y $\mathrm{coker}(\varphi)$.

[1] Recordar que si G y H son grupos, entonces el producto $G \times H$ es un grupo respecto a la ley de composición interna dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2)$.