Certamen 2 MAT214

Ningún objeto electrónico está autorizado. Toda respuesta debe estar debidamente justificada. Los puntajes de cada pregunta son indicativos y pueden ser modificados ulteriormente. Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

Problema 1 (60 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades geométricas del *espectro de un anillo* al dotarlo de su topología[1] de Zariski, y estudiar la relación con la localización. Se define el espectro del anillo A por

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A,\ \mathfrak{p} \text{ ideal primo}\}.$$

Dado un subconjunto $S \subseteq A$, definimos

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p}\},$$

los cuales verifican los axiomas de los conjuntos cerrados en un espacio topológico. La topología inducida en $\operatorname{Spec}(A)$ es llamada la topología de Zariski.
Recordemos además que un subconjunto $S \subseteq A$ es multiplicativo si $1 \in S$ y si $a, b \in S$ implica que $ab \in S$. Sea $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativo y definamos en el conjunto $A \times S$ la relación de equivalencia siguiente:

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S,\ t(as' - a's) = 0.$$

Denotaremos por $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$ al conjunto cociente, y por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a, s). Decimos que $S^{-1}A$ es la *localización* de A respecto a S. Podremos utilizar directamente el hecho que $S^{-1}A$ es un anillo conmutativo y que $\iota : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ es un morfismo de anillos.

1. (15 puntos) Demostrar que si $I = \langle S \rangle$ es el ideal generado por un subconjunto $S \subseteq A$, entonces $V(S) = V(I) = V(\sqrt{I})$.
2. (15 puntos) En este problema puede usar directamente el hecho que si k es un cuerpo entonces los ideales primos no-nulos en $k[X]$ son exactamente de la forma $\mathfrak{p} = \langle p(X) \rangle$, donde $p \in k[X]$ es un polinomio irreducible no constante. Describir $\operatorname{Spec}(\mathbb{C})$, $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X])$ y $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X])$.
3. (15 puntos) Probar que la aplicación $\operatorname{Spec}(S^{-1}A) \to \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \cap S = \varnothing\}$ definida por $\mathfrak{p} \mapsto \iota^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq A$ es una biyección, cuya inversa está dada por $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}\mathfrak{q} := (S \times \mathfrak{q})/\sim = \mathfrak{q} \cdot S^{-1}A$, el ideal generado por $\iota(\mathfrak{q})$.
4. (15 puntos) Consideremos $A = \mathbb{Z}$ y $f = 2 \in A$. Probar que $S = \mathbb{Z} \setminus \langle f \rangle$ y $T = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son conjuntos multiplicativos. Describir $S^{-1}A$ y $T^{-1}A$ (eg. dentro de $\operatorname{Frac}(A) = \mathbb{Q}$).

Bonus 1 (10 puntos) Sean A, $f \in A$, S y T como en el Problema 1.4. Usar los Problemas (1.3) y (1.4) para describir $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ y $\operatorname{Spec}(T^{-1}A)$.

---

[1] Sea X un conjunto y sea $\tau = \{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** si $\varnothing \in \tau$ y $X \in \tau$, si toda unión arbitraria $\cup_{j \in J} U_j \in \tau$ para todo $J \subseteq I$, y si la intersección $U_1 \cap U_2 \in \tau$ para cualquier par $U_1, U_2 \in \tau$. Los elementos de τ son llamados **abiertos** y sus complementos **cerrados**.

Hoja extra

Problema 2 (60 puntos)

El objetivo de este problema es resolver algunos de los ejercicios propuestos en clases.

1. (15 puntos) Sean $I_n = n\mathbb{Z}$ y $I_m = m\mathbb{Z}$ ideales en $\mathbb{Z}$ con $n, m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Probar que $I_n I_m = nm\mathbb{Z}$, $I_n \cap I_m = \mathrm{mcm}(n,m)\mathbb{Z}$ y $I_n + I_m = \mathrm{mcd}(n,m)\mathbb{Z}$.

2. (15 puntos) Sea M un A-módulo y sea $I \subseteq A$ un ideal. Probar que M/IM admite una estructura de A/I-módulo. ¿Qué puede decir si I es un ideal maximal?

3. (15 puntos) Sea $\mathcal{C} = C^0([0,1])$ el anillo conmutativo de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dado un elemento $x \in [0,1]$ definimos el ideal maximal de $\mathcal{C}$ asociado a x por
$$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0\}.$$
Probar que todo ideal maximal de $\mathcal{C}$ es de la forma $\mathfrak{m}_x$ para cierto $x \in [0,1]$.

4. (5 puntos) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que la sucesión
$$0 \to \ker(f) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f) \to 0$$
es exacta.

5. (10 puntos) Sea G un grupo abeliano finito. Probar que
$$G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0.$$

Usar adecuadamente la estructura de anillo conmutativo de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en los siguientes problemas.

Bonus 2 (10 puntos) Probar que un entero positivo es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Bonus 3 (10 puntos) Calcular el último dígito de $n = 8^{20}$.

Hoja extra