Certamen 1 MAT214

Ningún objeto electrónico está autorizado. Toda respuesta debe estar debidamente justificada. Los puntajes de cada pregunta son indicativos y pueden ser modificados ulteriormente. Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Nombre y apellido : ______________________________

ROL : ______________________________

Problema 1 (30 puntos)

Sea p un número primo. El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades del cuerpo $\mathbb{F}_p$ de p elementos y del grupo especial lineal $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ de matrices de tamaño 2×2 de determinante 1.

1. Suponer que p es impar. Probar que existe $x \in \mathbb{F}_p$ que no es un cuadrado, es decir, tal que no existe $y \in \mathbb{F}_p$ de tal suerte que $x = y^2$. (*Indicación: considerar la aplicación* $\varphi : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ *dado por* $x \mapsto x^2$, *mostrar que es un morfismo de grupos y estudiar su kernel e imagen.*)

2. Calcular el orden del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

3. Exhibir un p–subgrupo de Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

4. Probar que la cantidad de p–subgrupos de Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ es $p+1$. (*Indicación: justificar adecuadamente que* $n_p = rp + 1$ *para cierto* $r \geq 0$ *y que* $p^2 - 1 = n_p \cdot k$ *donde* $k = \ell p - 1$ *para cierto* $\ell \geq 1$. *Luego, probar que necesariamente* $r = 1$.)

Problema 2 (40 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar en detalle las propiedades del **producto semi-directo**, definido de la manera siguiente: Sean G y H dos grupos y sea $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ un morfismo de grupos. Si denotamos $G \rtimes_\varphi H$ al conjunto $G \times H$ dotado de la ley de composición interna definida por $(g_1, h_1) \rtimes_\varphi (g_2, h_2) = (g_1 \cdot \varphi(h_1)(g_2), h_1 h_2)$, entonces $G \rtimes_\varphi H$ es un grupo llamado el producto semi-directo de H por G respecto a φ.

1. Probar que $G \times \{e_H\} \trianglelefteq G \rtimes_\varphi H$ y que $\{e_G\} \times H \leq G \rtimes_\varphi H$.
2. Probar que el cociente de $G \rtimes_\varphi H$ por $G \times \{e_H\}$ es isomorfo a H.
3. Probar que $G \rtimes_\varphi H \cong G \times H$ si y sólo si el morfismo φ es trivial, si y sólo si $\{e_G\} \times H \trianglelefteq G \rtimes_\varphi H$
4. Supongamos que G es un grupo y N y H son sub-grupos de G tales que $N \cap H = \{e\}$, $NH = G$ y $N \trianglelefteq G$. Mostrar que la aplicación $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ dada por $h \mapsto \varphi_h$, con $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$, es un morfismo de grupos. Probar además que en este caso la aplicación $f : N \rtimes_\varphi H \to G$ dada por $f(n, h) = nh$ es un isomorfismo.

Problema 3 (30 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar el grupo de simetrías de un cuadrado centrado en el origen de $\mathbb{R}^2$, es decir, el grupo diedral $D_4 \subseteq O_2(\mathbb{R})$ generado por una rotación r en $\frac{\pi}{2}$ y simetría (reflexión) s respecto a la recta pasando por el origen y un vértice. Si denotamos por 1 al elemento neutro de D_4, entonces sabemos que

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}.$$

1. Calcular la tabla de multiplicación de D_4.
2. Probar que $Z(D_4) = \{1, r^2\}$ y que las clases de conjugación de D_4 son $\{1\}, \{r^2\}, \{r, r^3\}, \{s, r^2 s\}, \{rs, r^3 s\}$.
3. Sean $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (-1,0)$ y $v_4 = (0,-1)$ los vértices del cuadrado. Usando esta numeración, observamos que D_4 puede ser visto como un subgrupo del grupo de permutaciones S_4. Escribir las permutaciones asociadas a los elementos $1, r^2, r, s$ y rs, y calcular sus signaturas.
4. Con la misma numeración del punto anterior, escribir las matrices de rotación de tamaño 2×2 asociadas a los elementos $1, r^2, r, s$ y rs (vistos como elementos en $O_2(\mathbb{R})$), y calcular sus determinantes.
5. Determinar la tabla de caracteres irreducibles de D_4.