QUIZ 3 – ÁLGEBRA LINEAL AVANZADA (MAT210, 2025-1)

PROFESOR: PEDRO MONTERO, AYUDANTE: MADELINE CASTRO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Problema 1 (50 puntos)

Sea $V = \mathbb{R}^4$ con base canónica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, y considere las formas lineales $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in V^*$ dadas por

$$\ell_1 = e_1^* + e_2^* + e_3^*, \ell_2 = 2e_2^*, \ell_3 = 2e_3^*, \ell_4 = 3e_4^*.$$

- (a) (20 puntos) Probar que $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ es una base de V^* .
- (b) (30 puntos) Determinar una base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ sea la base dual de $\mathcal{B}$.

Indicación: Escriba cada f_i como combinación lineal de los e_j y determine explícitamente las constantes requeridas. Puede expresar su respuesta usando coordenadas en la base $\mathcal{C}$.

Solución: Para (a) suponemos que existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tales que $\ell := \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \lambda_3 \ell_3 + \lambda_4 \ell_4 \equiv 0$ en V^* . Luego, $\ell(e_1) = \lambda_1 = 0$, $\ell(e_2) = \lambda_1 + 2\lambda_2$, $\ell(e_3) = \lambda_1 + 2\lambda_3$, $\ell(e_4) = 3\lambda_4 = 0$, i.e., $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ y luego $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ son l.i. y por ende una base, dado que $\dim_{\mathbb{R}}(V^*) = \dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$. Para (b) notamos primero que si $f = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ entonces $\ell_1(f) = a + b + c$, $\ell_2(f) = 2b$, $\ell_3(f) = 2c$, $\ell_4(f) = 3d$ y luego $\ell_i(f_1) = \delta_{i1}$ implica $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\ell_i(f_2) = \delta_{i2}$ implica $f_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $\ell_i(f_3) = \delta_{i3}$ implica $f_3 = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$, y $\ell_i(f_4) = \delta_{i4}$ implica $f_4 = (0, 0, 0, \frac{1}{3})$.

Problema 2 (50 puntos)

Considere $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x, y, z, t) respecto a la base canónica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ y considere la forma cuadrática real

$$Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 10t^2 + 2xy + 2xt + 2yt.$$

- (a) (10 puntos) Determinar la matriz $A_{\mathcal{B}} = (B(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq 4} \in M_4(\mathbb{R})$ asociada a la única forma bilineal simétrica $B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ determinada por Q .
- (b) (30 puntos) Utilizando el método reducción de Gauss, determine el rango y signatura de Q .
- (c) (10 puntos) Determine los vectores isotropos de $\mathbb{R}^4$ respecto a la forma cuadrática Q .

Solución: Para (a), utilizamos el algoritmo visto en clases (o bien la fórmula de polarización) para calcular

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Para (b), consideramos la variable x para escribir $Q(x, y, z, t)$ como

$$x^2 + 2x(y+t) + (5y^2 + 4z^2 + 10t^2 + 2yt) = (x+y+t)^2 - (y+t)^2 + 5y^2 + 4z^2 + 10t^2 + 2yt = (x+y+t)^2 + 4y^2 + 4z^2 + 9t^2,$$

i.e., $Q = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 + \ell_4^2$, donde las ℓ_i son las mismas formas linealmente independientes. Luego, la signatura de Q es $(p, q) = (4, 0)$ y $\text{rg}(Q) = 4 + 0 = 4$. Por último, para (c) basta notar que Q es definida positiva y por ende $\{0\}$ es el único vector isotropo.