Quiz 1 MAT210

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

INSTRUCCIONES GENERALES:

- La evaluación comenzará a las 9:00 AM del día Sábado 2 de Mayo 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 14:00 PM del día Sábado 2 de Mayo 2020.
- Lea cuidadosamente cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, concisa y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones allí vistas, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `Q1_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Problema 1 (50 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar la relación entre las matrices de permutación de tamaño $n \times n$ y los elementos del grupo de permutaciones S_n.

Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ un entero positivo. Si denotamos por $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canónica de k^n, definimos la **matriz de permutación** $P(\sigma) \in M_n(k)$ asociada a la permutación $\sigma \in S_n$ como la matriz asociada a la aplicación lineal $\rho_\sigma : k^n \to k^n$ dada por $\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, respecto a la base canónica. En otras palabras, $P(\sigma) = \mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(\rho_\sigma)$.

1. Describir todas las matrices de permutación de tamaño 3×3, es decir, describir explícitamente los elementos del conjunto $\{P(\sigma)\}_{\sigma \in S_3}$.

2. Probar que para todo $\sigma \in S_n$ la matriz $P(\sigma)$ pertenece a $\mathrm{GL}_n(k)$ y calcular su inversa.

3. Demostrar que $\det(\rho_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ es la signatura de la permutación $\sigma \in S_n$, para toda permutación $\sigma \in S_n$.

Solución:

1. **(10 pts)** Cada matriz de permutación $P(\sigma)$ se obtiene al permutar las columnas de la matriz identidad usando σ. El grupo simétrico S_3 está dado por $S_3 = \{\mathrm{id}, (1,2), (2,3), (1,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$, por lo que los elementos $P(\sigma)$ están dados por:

$$P(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P((1,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P((2,3,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P((3,1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dado que $\sigma \in S_n$ es una biyección, ρ_σ envía una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de k^n en una base $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ de k^n. Luego $P(\sigma)$ es invertible, i.e., $P(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(k)$ **(10 pts)**. Notar que $(\rho_{\sigma^{-1}} \circ \rho_\sigma)(e_i) = \rho_{\sigma^{-1}}(e_{\sigma(i)}) = e_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} = e_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, $\rho_\sigma^{-1} = \rho_{\sigma^{-1}}$ y en particular $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1})$ **(10 pts)**.

3. Tenemos que $\det(\rho_\sigma) = \det(P(\sigma)) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) p_{\tau(1)1} \cdots p_{\tau(n)n}$, donde $P(\sigma) = (p_{ij}) \in M_n(k)$. Por definición de ρ_σ y de $P(\sigma)$, los únicos elementos $p_{\tau(i)i} \neq 0$ no-nulos son aquellos de la forma $p_{\sigma(i)i} = 1$. Luego, la suma anterior se reduce a $\sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) p_{\tau(1)1} \cdots p_{\tau(n)n} = \varepsilon(\sigma) p_{\sigma(1)1} \cdots p_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma)$, de donde se concluye el resultado[1] **(20 pts)**.

[1] Alternativamente, se puede usar directamente las propiedades vistas en clase para deducir que $\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon(\sigma)$.

Problema 2 (50 puntos)

El objetivo de este problema es calcular el determinante de una matriz de una forma muy particular, que aparece de forma natural en el contexto de la interpolación por polinomios en Análisis Numérico.

Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ un entero positivo. Sean $a_1, \dots, a_n \in k$ elementos arbitrarios y fijos durante todo el problema. Consideremos la matríz $A_n(a_1, \dots, a_n) \in M_n(k)$ definida por

$$A_n(a_1,\dots,a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Para $n = 2$, calcular el valor de $\det(A_2(a_1, a_2))$.
2. Definamos el polinomio $P \in k[X]$ mediante $P(X) := \det(A(a_1, \dots, a_{n-1}, X))$, el cual es un polinomio de grado $n-1$ (esto último, puede usarlo directamente sin demostración). Determinar las raíces de $P(X)$ en k y deducir que el coeficiente que acompaña X^{n-1} es $\det(A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}))$.
3. Calcular el valor exacto de $\det(A_3(a_1, a_2, a_3))$ usando los puntos (1) y (2). Deducir una fórmula general para $\det(A(a_1, \dots, a_n))$ y probarla usando inducción.

Solución:

1. $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_1$ **(5 pts)**.
2. Dado que el determinante es una forma multilineal alternada, sabemos que si dos columnas de una matriz son iguales entonces el determinante es cero. En particular, $P(a_i) = \det(A(a_1, \dots, a_{n-1}, a_i)) = 0$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ **(10 pts)**. Luego, $P(X) = c(X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_{n-1}) = cX^{n-1} + \dots$, donde $c \in k$ es el coeficiente principal de $P(X)$. Para determinar c notamos que en el desarrollo por columnas del determinante

$$P(X) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & X \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}$$

   la única forma de obtener X^{n-1} es desarrollar la última columna[2]: $(+1)\cdot X^{n-1}\det(A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})) + (-1)X^{n-2}c_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}c_0$, donde los $c_i \in k$ son los cofactores correspondientes. Luego, el término que acompaña X^{n-1} es $\det(A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}))$ **(15 pts)**.
3. Sabemos que $P(X) = \det(A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}))(X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_{n-1})$ y que $\det(A_n(a_1, \dots, a_n)) = P(a_n)$, por lo que si $n = 3$ obtenemos que $\det(A_3(a_1, a_2, a_3)) = \det(A_2(a_1, a_2))(a_3 - a_1)(a_3 - a_1) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$ **(5 pts)**. Luego, deducimos que $\det(A_n(a_1, \dots, a_n)) = \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$ **(5 pts)**. En efecto, por inducción (y los puntos anteriores), tenemos que $\det(A_n(a_1, \dots, a_n))$ está dado por[3]

$$\begin{aligned} \det(A_n(a_1,\dots,a_n)) &= \det(A_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1}))(a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) \\ &= \left(\Pi_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j - a_i)\right)(a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) = \Pi_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i) \ \textbf{(10 pts)}. \end{aligned}$$

[2] Alternativamente, también se puede argumentar usando la fórmula $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$ y notando que sólo hay que considerar los sumandos que contienen el término $a_{\sigma(n)n} = a_{nn} = X^{n-1}$, por lo que $\sigma = (\sigma', n)$ con $\sigma' \in S_{n-1}$ para dichos sumandos (y en particular $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')$, pues σ y σ' tienen el mismo número de inversiones). Así, $\sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n-1)n-1} a_{nn} = X^{n-1} \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n-1)n-1} = X^{n-1}\det(A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}))$, y el término que acompaña X^{n-1} es $\det(A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}))$.

[3] Este determinante es conocido comúnmente como **determinante de Vandermonde**.