Guia 3 de Ejercicios (MAT210)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Sea k un cuerpo, y sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n$.

1. El objetivo de este ejercicio es verificar que las propiedades de matrices que conmutan no son necesariamente ciertas para matrices que no conmutan. Más específicamente:

   (a) Sean
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   matrices en $M_2(\mathbb{R})$. Probar que A y B son diagonalizables, $AB \neq BA$ y que $A + B$ y AB no son diagonalizables.

   (b) Sean
   $$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   matrices elementales en $M_2(k)$. Probar que $E_{12}^2 = E_{21}^2 = 0$, $E_{12}E_{21} \neq E_{21}E_{12}$, y que $E_{12} + E_{21}$ y $E_{12}E_{21}$ no son nilpotentes.

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\lambda \in \mathbb{C}$ es su único valor propio. Describir su descomposición de Dunford $A = S + N$, y describir A^n en términos de S y N.

3. Consideremos la matriz real
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinar la descomposición de Dunford $A = S + N$ de la matriz A.

   (b) Calcular el orden de nilpotencia de N.

   (c) Deducir, a partir de los puntos anteriores, una fórmula para A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real. Supongamos que existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ matriz invertible compleja tal que $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal con coeficientes <u>reales</u> (i.e., $D \in M_n(\mathbb{R})$). Probar que existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matriz invertible real tal que $Q^{-1}AQ = D$.

5. Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideremos la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

   Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ de tal suerte que A sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

6. Calcular el número de clases de equivalencia de clases de semejanza de matrices nilpotentes en $M_6(k)$. Dar un representante de cada clase.

7. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ números complejos distintos. Sea $P(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{n_j}$ con $n_j \geq 1$ y $n_1 + \ldots + n_p =: n$. En particular, el Teorema de Jordan implica que el número de clases de semejanza de matrices complejas $A \in M_n(\mathbb{C})$ tales que $P_A = P$ es igual a $p(n_1) \cdots p(n_p)$, donde $p(n_j)$ es el número de particiones de $n_j \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

   (a) Sea $P(X) = X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4$. ¿Cuál es el número de clases de semejanza de matrices en $M_7(\mathbb{C})$ con polinomio característico P?

(b) Dado $P(X) = \prod_{j=1}^{p}(X - \lambda_j)^{n_j}$ como en la introducción del ejercicio, definimos

$$\mathscr{C}(P) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tal que } P_A = P\}.$$

¿Bajo qué condición sobre P el conjunto $\mathscr{C}(P)$ está formado por una única clase de semejanza?

8. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo tal que su polinomio característico $P_u \in k[X]$ escinde sobre k, y sea $u = u_s + u_n$ su descomposición de Dunford. Sea $\mathscr{B}$ una base de V tal que

$$J := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c:c:c} J_{\mathbf{n}_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & J_{\mathbf{n}_p}(\lambda_p) \end{array}\right)$$

es la forma canónica de Jordan de u. Probar que $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_s)$ y $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)$ están dadas por

$$S = \left(\begin{array}{c:c:c} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_p \mathrm{I}_{n_p} \end{array}\right) \quad \text{y} \quad N = \left(\begin{array}{c:c:c} J_{\mathbf{n}_1} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & J_{\mathbf{n}_p} \end{array}\right).$$

9. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar la forma canónica de Jordan de A.

(b) A partir de lo anterior, deducir la descomposición de Dunford $A = S + N$ de A. Determinar el orden de nilpotencia de N.

(c) Usando los puntos anteriores, determinar una matriz $B \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $A = B^2$. ¿Es B única?

10. El objetivo de este ejercicio es verificar a mano que ciertas normas son equivalentes[1]. Más específicamente:

(a) Probar que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_2.$$

(b) Sea $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Probar que para todo $x \in V$ se tiene

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty.$$

11. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices en $M_2(\mathbb{R})$. Probar[2] que $\|AB\|_1 \le \|A\|_1\|B\|_1$.

12. Sea $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices tal que $A_m \in \mathrm{GL}_n(k)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $A \in M_n(k)$ y que $(A_m^{-1})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $B \in M_n(k)$. Probar que $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ y que $A^{-1} = B$. Dar un ejemplo de una sucesión $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de matrices invertibles que converge a cierta $M \in M_n(k)$, pero tal que $(M_m^{-1})_{m\in\mathbb{N}}$ diverge y $M \notin \mathrm{GL}_n(k)$.

13. Sean $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números complejos tales que las series $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ convergen a $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C}$, respectivamente. Se define su **producto de Cauchy** como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ donde

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0.$$

[1] En general, si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces **todas** las normas en V son equivalentes (ver §24 del curso).

[2] En §24 del curso, probamos que esto es cierto para matrices de tamaño arbitrario. El objetivo de este problema es reescribir la demostración en el caso particular de matrices 2×2.

En §24 del curso se prueba[3] que si $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ convergen absolutamente entonces $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ converge (absolutamente) al producto $(\sum_{m=0}^{\infty} a_m)(\sum_{m=0}^{\infty} b_m) = ab$. De hecho, con un poco más de esfuerzo, se puede probar que basta que una de las dos series, $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ o $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$, converga absolutamente para tener el mismo resultado. El objetivo de este ejercicio es probar que esta condición es realmente necesaria. Más específicamente, sea $a_m = b_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}}$ para todo $m \in \mathbb{N}$:

(a) Probar que $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m$ es convergente pero que **no** es absolutamente convergente.

(b) Calcular $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$ y probar que $|c_k| \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Concluir que el producto de Cauchy $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ diverge.

14. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ matriz compleja tal que $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Probar que la sucesión de matrices $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definida por

$$S_m = \mathrm{I}_n + A + A^2 + \ldots + A^m$$

es convergente.

(b) Probar que $B := \mathrm{I}_n - A$ es invertible, y que $B^{-1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$.

15. Sea $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea $A \in M_n(k)$.

(a) Probar que $\exp({}^{\mathrm{t}}A) = {}^{\mathrm{t}}\exp(A)$.

(b) Probar que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

16. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular la forma canónica de Jordan J de A.

(b) Deducir a partir de lo anterior la descomposición de Dunford $A = S + N$ de A.

(c) Calcular la exponencial $\exp(J)$ y deducir el valor de $\exp(A)$.

17. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz <u>real</u>. Definimos el **coseno** $\cos(A) \in M_n(\mathbb{R})$ de A (resp. el **seno** $\sin(A) \in M_n(\mathbb{R})$ de A) como la parte real (resp. imaginaria) de la matriz compleja $e^{iA} \in M_n(\mathbb{C})$.

(a) Probar que las matrices $\cos(A)$ y $\sin(A)$ conmutan, y que $\cos(A)^2 + \sin(A)^2 = \mathrm{I}_n$.

(b) Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Calcular $\cos\begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$ y $\sin\begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$.

18. Resolver (i.e., determinar la solución general) el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$$

Determinar la única solución que verifica $(x(0), y(0)) = (1, 2)$.

19. Resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = y - 12z \\ y' = -x + 2y - 20z \\ z' = x - 5z \end{cases}$$

20. Resolver la ecuación diferencial $x''' + 3x'' - 4x = 0$.

21. Encontrar todas las soluciones <u>reales</u> de la EDO $x^{(n)}(t) = x(t)$.
Indicación: Tratar separadamente el caso n par y el caso n impar.

22. Encontrar una EDO lineal homogenea con coeficientes constantes <u>reales</u> tal que las dos funciones $f(t) = t^2\cos(2t)$ y $g(t) = t^3 e^{-t}$ sean soluciones.

[3] Mejor aún, se prueba que esto es valido también para series matriciales.