Guia 2 de Ejercicios (MAT210)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Sea k un cuerpo, y sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n$.

1. Sea $u \in \mathrm{End}_k(V)$ y $v \in V$ un vector propio asociado al valor propio $\lambda \in k$. Probar que para todo polinomio $Q \in k[X]$ se tiene que $Q(u)(v) = Q(\lambda)v$.

2. Sean $V_1, V_2 \subseteq V$ dos sub-espacios vectoriales de V. Consideremos la aplicación lineal

$$\rho : V_1 \times V_2 \to V,\ (v_1, v_2) \mapsto \rho(v_1, v_2) := v_1 + v_2.$$

   (a) Si denotamos a la imagen $\mathrm{Im}(\rho) \subseteq V$ por $V_1 + V_2$, demostrar que $V_1 + V_2 = \mathrm{Vect}_k(V_1, V_2)$ es el sub-espacio vectorial generado por V_1 y V_2.

   (b) Probar que $\ker(\rho) = \{(v, -v),\ v \in V_1 \cap V_2\}$ y deducir que $\ker(\rho) \cong V_1 \cap V_2$.

   (c) Deducir que
$$\dim_k(V_1 + V_2) = \dim_k(V_1) + \dim_k(V_2) - \dim_k(V_1 \cap V_2),$$
   y que $V = V_1 \oplus V_2$ si y sólo si $V = \mathrm{Vect}_k(V_1, V_2)$ y $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

3. Sean $V_1, \ldots, V_p \subseteq V$ sub-espacios vectoriales de V tales que $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_j$, y sea $\mathscr{B}_j$ una base de V_j para $j \in \{1, \ldots, p\}$. Consideremos un endomorfismo $u : V \to V$ y supongamos que $u(V_j) \subseteq V_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$. Probar que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c:c:c} A_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & A_p \end{array}\right)$$

   es una matriz diagonal por bloques, donde $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$ es la base obtenida al yuxtaponer las bases de $V_1, \ldots, V_p$ y donde $A_j \in M_{n_j}(k)$ con $n_j = \dim_k(V_j)$.

4. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo. Probar que $\lambda \in k$ es el **único** valor propio de u si y sólo si $u = \lambda\, \mathrm{Id}_V$ es una homotecia (de factor λ).

5. Calcular valores y vectores propios de la matriz de rotación compleja $A_\theta \in M_2(\mathbb{C})$ dada por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

   donde $\theta \in \mathbb{R}$ es un ángulo real. Concluir que A_θ es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

6. Sea $P \in k[X]$ y $a \in k$. Probar que a es una raíz múltiple de P (i.e., de multiplicidad ≥ 2) si y sólo si $P(a) = P'(a) = 0$.[1]

7. Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 8} \in M_8(\mathbb{R})$. En la fórmula explícita del determinante de A, ¿cuál es el signo correspondiente al término $a_{1,8}a_{2,7}a_{3,1}a_{4,6}a_{5,3}a_{6,4}a_{7,2}a_{8,5}$?

8. Sea $u : V \to V$ un endormorfismo y $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de V. Probar que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ es triangular superior si y sólo si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ es triangular inferior, donde $\mathscr{C} = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$.

9. El objetivo de este problema es comparar los valores propios, traza y determinante de un automorfismo $u \in \mathrm{GL}(V)$ y de su inverso $u^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$. Sea $u \in \mathrm{GL}(V)$ un automorfismo de V:

   (a) Expresar los valores propios de u^{-1} en términos de los valores propios de u.

[1] **Recuerdo:** Si $P \in k[X]$ está dado por $P(X) = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$, entonces la *derivada formal* de P está definida por $P'(X) = d a_d X^{d-1} + \ldots + 2a_2 X + a_1 \in k[X]$. Por ejemplo, si $k = \mathbb{F}_p$ y $P(X) = X^p - X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ entonces $P'(X) = -1$ es un polinomio constante (no-nulo).

(b) Probar que u es diagonalizable si y sólo si u^{-1} es diagonalizable.

(c) Sea $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ una matriz triangular superior invertible con términos diagonales dados por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$. Probar que A^{-1} es una matriz triangular superior y determinar sus términos diagonales.

(d) Deducir, usando el punto anterior, que si $P_u \in k[X]$ escinde sobre k, i.e., se factoriza de la forma $P_u(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \lambda_j)$ donde $\lambda_j \in k$ (no necesariamente diferentes), entonces

$$\det(u^{-1}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \quad \text{y} \quad \mathrm{tr}(u^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}.$$

10. Sean $u : V \to V$ y $v : V \to V$ endomorfismos. Probar que $u \circ v$ y $v \circ u$ tienen los mismos valores propios.

11. Sea $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos(x), \sin(x)) \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el sub-espacio vectorial real generado por las funciones coseno y seno.

(a) Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

(b) Probar que la derivación $d : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(x) \mapsto f'(x)$ induce un endomorfismo $d_V := d|_V : V \to V$ de V. Determinar $\mathrm{rg}(d_V)$.

(c) Probar que d_V no posee vectores propios.

(d) Consideremos $V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\cos(x), \sin(x)) \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el espacio vectorial complejo generado por las funciones coseno y seno. Determinar una base de $V_{\mathbb{C}}$ formada por valores propios de $d_{V_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$.

12. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo, y sean $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in M_n(k)$ y $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) \in M_n(k)$ dos matrices representando a u respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ de V (i.e., A y B son semejantes: existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ tal que $B = P^{-1}AP$). Probar que $B^n = P^{-1}A^nP$ y, en particular, A^n y B^n representan al mismo endomorfismo $u^n : V \to V$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

13. Determinar valores y vectores propios de la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

14. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo diagonalizable. Demostrar que $V = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

15. El objetivo de este problema es obtener un algorítmo para calcular el máximo común divisor entre dos polinomios no-nulos en $k[X]$. Si P es un polinomio no-nulo, definimos $\mathrm{mcd}(P, 0) := P$. Sean $A, B \in k[X]$ no-nulos tales que $\mathrm{gr}(B) \leq \mathrm{gr}(A)$:

(a) Considerar la división euclideana de $A(X)$ por $B(X)$ dada por

$$A(X) = Q_0(X)B(X) + R_0(X),$$

donde[2] se cumple $\mathrm{gr}(R_0) < \mathrm{gr}(B)$. Probar que un polinomio $D(X)$ divide $A(X)$ y $B(X)$ si y sólo si $D(X)$ divide $B(X)$ y $R_0(X)$. Deducir que $\mathrm{mcd}(A, B) = \mathrm{mcd}(B, R_0)$.

(b) Sea $A_1(X) := B(X)$ y $B_1(X) := R_0(X)$. Describir la división euclideana de $A_1(X)$ por $B_1(X)$, y definir convenientemente nuevos polinomios $A_2(X)$ y $B_2(X)$.

(c) Proponer un algoritmo para generar polinomios $A_{k+1}(X)$ y $B_{k+1}(X)$ a partir de los polinomios $A_k(X)$ y $B_k(X)$. Demostrar que en cada etapa se tiene la desigualdad

$$\mathrm{gr}(A_{k+1}) + \mathrm{gr}(B_{k+1}) < \mathrm{gr}(A_k) + \mathrm{gr}(B_k).$$

[2]Recordemos que, por convención, el grado del polinomio nulo es $\mathrm{gr}(0) := -1$. Luego, si $B(X) = B \in k \setminus \{0\}$ es un polinomio constante entonces $\mathrm{gr}(R_0) < \mathrm{gr}(B)$ implica que $R_0 = 0$.

(d) Concluir que eventualmente $B_N(X) = 0$ para cierto N, es decir, el algoritmo termina. Y deducir que $\mathrm{mcd}(A, B) = \mathrm{mcd}(A_1, B_1) = \ldots = \mathrm{mcd}(A_N, 0) = A_N$.

(e) Usar el algoritmo anterior para calcular el máximo común divisor entre los polinomios reales $A(X) = X^2 + 7X + 6$ y $B(X) = X^2 - 5X - 6$.

(f) Usar el algoritmo anterior para calcular el máximo común divisor entre los polinomios reales $A(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ y $B(X) = X^3 - 1$.

16. El objetivo de este problema es estudiar las factorizaciones de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$.

(a) Demostrar que todo polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ con coeficientes reales es el producto de polinomios reales de grado ≤ 2. *Indicación: Agrupar las raíces complejas no-reales en pares conjugados.*

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, descomponer el polinomio real $P(X) = X^n - 1$ como producto de polinomios reales de grado ≤ 2. Utilizar la factorización del polinomio $X^5 - 1$ para determinar el valor exacto de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

17. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo y $m_u \in k[X]$ su polinomio minimal.

(a) Probar que $\mathrm{gr}(m_u) = 1$ (i.e., $m_u(X) = X - \lambda$ para cierto $\lambda \in k$) si y sólo si u es una homotecia (de factor λ). En particular, $m_u(X) = X$ si y sólo si $u = 0$.

(b) Sea $A \in M_2(k)$ una matriz 2×2. Probar que si A no es una homotecia, entonces $m_A = P_A$. Utilizar esto para construir una matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $m_A(X) = P_A(X) = X^2 + 1$.

(c) Dar un ejemplo de una matriz 3×3, $A \in M_3(k)$, que no sea una homotecia y que cumpla $\mathrm{gr}(m_A) < \mathrm{gr}(P_A)$.

18. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(a) Determinar el polinomio minimal $m_A \in \mathbb{R}[X]$ de A.

(b) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existen reales $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $A^n = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$.

(c) Calcular explícitamente a_n y b_n en función de n.

(d) Deducir una fórmula explícita para A^n.

19. Determinar el polinomio minimal de las matrices reales siguientes:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Consideremos la matriz diagonal por bloques
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in M_n(k).$$

(a) Demostrar que el polinomio minimal $m_A \in k[X]$ de A divide al producto $m_{A_1} m_{A_2}$ de los polinomios minimales de los bloques A_1 y A_2.

(b) Dar un ejemplo donde $m_A = m_{A_1} m_{A_2}$ y un ejemplo donde $\mathrm{gr}(m_A) < \mathrm{gr}(m_{A_1} m_{A_2})$.

21. El objetivo de este problema es probar un criterio muy útil para determinar si un endomorfismo es diagonalizable.

(a) Sea $u : V \to V$ un endomorfismo. Demostrar que u es diagonalizable si y sólo si existe un polinomio $Q \in k[X]$ que escinde sobre k con raíces simples tal que $Q(u) = 0$.

(b) Utilizar el criterio anterior para probar que toda matríz compleja $A \in M_n(\mathbb{C})$ que verifica $A^3 = \mathrm{I}_n$ es necesariamente diagonalizable. ¿Qué puede decir en el caso real?

(c) Utilizar el criterio anterior para probar que toda matríz compleja $A \in M_n(\mathbb{C})$ que verifica $A^2 = \mathrm{I}_n$ es necesariamente diagonalizable. ¿Qué puede decir en el caso real?