Guia 1 de Ejercicios (MAT210)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Sea k un cuerpo. Para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, denotaremos por $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canónica de k^n.

1. Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo tal que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -6 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinar $\ker(u)$ y $\mathrm{Im}(u)$.

   (b) Sean $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = 2e_2 + e_3$, $v_3 = e_1 + e_3$. Probar que $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y determinar $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$.

   (c) Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar la matriz de u^n respecto a la base canónica $\mathscr{B}$.

2. Sea $V = \mathbb{C}[X]_3$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de polinomios en la variable X con coeficientes complejos y de grado ≤ 3. Considere las funciones de V en V siguientes:

$$u : P \mapsto P' + P'' + XP(0) \quad \text{y} \quad v : P \mapsto X^3 P(0) - P'.$$

   Demostrar que tanto u como v son aplicaciones lineales. Determinar para ambas su rango, kernel e imagenes, así como su inversa en caso de existir.

3. Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ y sea $\sigma \in S_n$ la permutación de $\{1, \dots, n\}$ definida por

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3, \dots,\ \sigma(n-1) = n,\ \sigma(n) = 1.$$

   (a) Calcular la signatura $\varepsilon(\sigma)$.

   (b) Sea $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in M_n(k)$ la matríz asociada al endomorfismo $u : k^n \to k^n$ de k^n dado por $u(e_i) = e_{\sigma(i)}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Describir P y calcular $\det(P)$.

4. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Sea $a \in k$ un elemento arbitrario, pero fijo durante el problema. Para $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se define $d_n \in k$ como el determinante $n \times n$ siguiente

$$d_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

   (a) Calcular d_1 y d_2.

   (b) Determinar una fórmula para d_n en función de d_{n-1} y d_{n-2}. Deducir una fórmula general para d_n y probarla por inducción en n.

6. Sea $a \in k$ un elemento arbitrario, pero fijo durante el problema. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a+2 & 2a+3 & 3a+4 \\ 2a+3 & 3a+4 & 4a+5 \\ 3a+5 & 5a+8 & 10a+17 \end{vmatrix}$$

   escribiendo el resultado final como producto de polinomios de grado 1 en la variable a.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ una matríz real 2×2 arbitraria, pero fija durante todo el problema. Consideremos el endomorfismo

$$L_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),\ B \mapsto L_A(B) = AB.$$

   (a) Determinar la matriz de L_A respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ dada por las matrices elementales E_{ij}.

   (b) Calcular $\det(L_A)$.

8. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo de un k-espacio vectorial V de dimensión finita $\dim_k(V) = n$. Sea $W \subseteq V$ un sub-espacio vectorial no-nulo de dimensión $m < n$, y supongamos que $u(W) \subseteq W$ (en este caso, decimos que W es **estable** o **invariante** por u). Demostrar que existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in M_n(k)$ es una matriz triangular superior por bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

   donde $A \in M_m(k)$. *Indicación: Escoger una base $e_1, \ldots, e_m$ de W y completarla en una base de V.*

9. Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Para toda matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, definimos su **traza** como la suma de sus términos diagonales

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   (a) Probar que $\mathrm{tr} : M_n(k) \to k$ es una aplicación lineal.

   (b) Sean $A, B \in M_n(k)$. Demostrar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

   (c) Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n$ y sea $E = \mathrm{End}_k(V)$. Dado $u : V \to V$ un endomorfismo (i.e., un elemento de E), definimos $\varphi_u \in \mathrm{End}_k(E)$ mediante

$$\varphi_u : E \to E,\ v \mapsto \varphi_u(v) = u \circ v - v \circ u.$$

   Demostrar que $\det(\varphi_u) = 0$. *Indicación: Fijar una base $\mathscr{B}$ de V, de tal suerte que $V \cong k^n$ y $E \cong M_n(k)$, y luego probar utilizando los puntos (a) y (b) que para $A \in M_n(k)$ el endomorfismo $\Phi_A : M_n(k) \to M_n(k),\ B \mapsto AB - BA$ no es sobreyectivo.*