Ejemplo §29 (MAT210)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Consideremos la matriz real 2×2 (que **no** es simétrica) dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

y sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal asociada. Explícitamente,

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática asociada a la forma bilineal B. Explícitamente,

$$Q(x_1, x_2) = B((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Denotemos por $B_Q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la **única** forma bilineal <u>simétrica</u> asociada a la forma cuadrática Q, dada por la fórmula de polarización:

$$\begin{aligned} B_Q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \frac{1}{2}(Q(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - Q(x_1, x_2) - Q(y_1, y_2)) \\ &= \frac{1}{2}((x_1 + y_1)^2 + 6(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + 5(x_2 + y_2)^2 - (x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2) - (y_1^2 + 6y_1y_2 + 5y_2^2)) \\ &= \frac{1}{2}(2x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 10x_2y_2) \\ &= x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 \end{aligned}$$

Luego, la matriz simétrica $A(Q)$ asociada a la forma cuadrática Q (que, por definición, es la matriz asociada a la forma bilineal simétrica asociada B_Q) es:

$$A(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observación importante: Se puede demostrar usando la fórmula de polarización (ejercicio) que si $A \in M_n(k)$ es una matriz no necesariamente simétrica, $B : k^n \times k^n \to k$ es la forma bilineal (no necesariamente simétrica) asociada a A, y Q la forma cuadrática asociada a B. Entonces la matriz $A(Q)$ de la única forma bilineal <u>simétrica</u> asociada a Q está dada por

$$A(Q) = \frac{A + {}^{\mathrm{t}}A}{2}.$$