Examen MAT210

Nombre y apellido : ______________________________

ROL : ______________________________

Instrucciones Generales:

- La evaluación comenzará a las 9:00 AM del día Miércoles 12 de Agosto de 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 21:00 PM del día Miércoles 12 de Agosto de 2020.
- Lea con cuidado cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, concisa y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones vistas en el curso y en la ayudantía, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. En particular, todas las respuestas deben desarrollarse **usando la notación del curso**. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `E_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Notación: Durante todo el Certamen, denotaremos por k un cuerpo arbitrario (a menos que se especifique lo contrario) y por V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n \geq 1$.

Tabla de puntajes: Puntaje base: 1 punto.

P1	(a)	(b)	(c)	(d)	P2	(a)	(b)	(c)	(d)
	5	10	10	10		10	5	10	10
P3	(a)	(b)	(c)	(d)					
	5	10	10	10					

Problema 1 (35 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar el kernel, imagen y rango de una familia de endormorfismos de $\mathbb{C}^3$ que dependen de dos parámetros complejos $a, b \in \mathbb{C}$.

Durante todo este problema nos situaremos en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ con coordenadas (x, y, z) respecto a la base canónica $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$. Sea $u : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ respecto a la base canónica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ son complejos.

Recordemos[1] que un **operador de proyección** (o símplemente, un **proyector**) es un endomorfismo $p : V \to V$ de un k-espacio vectorial V tal que $p \circ p = p$.

(a) Probar que existe un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ (a determinar) tal que $u \circ u = \lambda u$.

(b) Determinar una base de $\mathrm{Im}(u)$ y ecuaciones de $\ker(u)$, así como las dimensiones de dichos sub-espacios. Deducir que $V = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ si y sólo si $\lambda \neq 0$.

(c) Determinar bajo que condición el endomorfismo u es un proyector. Describir la naturaleza geométrica de dicho proyector (e.g. con un dibujo[2]).

(d) En el caso $\lambda \neq 0$, determinar una base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ formada a partir de una base de $\mathrm{Im}(u)$ y de una base de $\ker(u)$ (en ese orden), y determinar la matriz $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ de u respecto a dicha base.

Solución:

(a) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2+1 & a^3+b^2a+a & b^3+a^2b+b \\ a^3+b^2a+a & a^4+b^2a^2+a^2 & ba^3+b^3a+ba \\ b^3+a^2b+b & ba^3+b^3a+ba & b^4+a^2b^2+b^2 \end{pmatrix} = (1+a^2+b^2) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix},$$

por lo que $\lambda = 1 + a^2 + b^2$.

(b) Dado que $\mathrm{Im}(u)$ está generada por $u(e_1) = (1, a, b)$, $u(e_2) = (a, a^2, ab) = a(1, a, b)$ y $u(e_3) = (b, ab, b^2) = b(1, a, b)$, tenemos que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle(1, a, b)\rangle$ es una recta en $\mathbb{C}^3$ (i.e., $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(u) = 1$). Por otra parte, $\ker(u)$ está determinado por vectores $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + ay + bz & = 0 \\ ax + a^2y + abz & = 0 \\ bx + aby + b^2z & = 0 \end{array} \right.$$

Notamos que las dos últimas ecuaciones son proporcionales a la primera (se obtienen al multiplicarla por a y b, respectivamente). Luego, la ecuación de $\ker(u)$ es $x + ay + bz = 0$, de donde obtenemos que $\ker(u)$ es un plano en $\mathbb{C}^3$ (i.e., $\dim_{\mathbb{C}} \ker(u) = 2$).

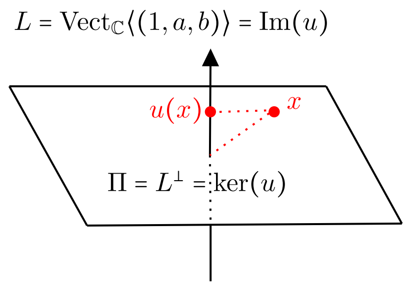
Finalmente, dado que $\dim_{\mathbb{C}} \ker(u) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(u) = 3$, para que $\ker(u)$ e $\mathrm{Im}(u)$ estén en suma directa, es necesario y suficiente que $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. En otras palabras, que $u(e_1) = (1, a, b) \notin \ker(u)$, lo cual equivale (reemplazando en la ecuación de $\ker(u)$) a que $\lambda = 1 + a^2 + b^2 \neq 0$.

[1] Ver Certamen 1, Problema 4.

[2] Como es usual, dibujar $\mathbb{C}^3$ como si fuese $\mathbb{R}^3$.

(c) Por definición, u es un proyector si y sólo si $u \circ u = u$, lo cual equivalen gracias al punto (a) a que $\lambda u = u$. Dado que $u \neq 0$, esto último equivale[3] a que $\lambda = 1 + a^2 + b^2 = 1$, i.e., $a^2 + b^2 = 0$. En tal caso, u es la proyección sobre la recta $L = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle(1, a, b)\rangle$.

Comentario adicional: Si además consideramos la estructura de espacio hermitiano en $\mathbb{C}^3$ con el producto escalar estándar, entonces u es la **proyección ortogonal** sobre la recta L, donde $L^{\perp} = \ker(u)$ es el plano ortogonal como en la figura siguiente.



(d) Ya observamos que $v_1 = (1, a, b) \in \mathbb{C}^3$ es una base de $\mathrm{Im}(u)$. Por otro lado, todo vector (x, y, z) en $\ker(u) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + ay + by = 0\}$ verifica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ay - az \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, los vectores linealmente independientes $v_2 = (-a, 1, 0)$ y $v_3 = (-b, 0, 1)$ forman una base de $\ker(u)$. Finalmente, considerando la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ tenemos que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 (35 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar las propiedades de una familia de endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ que dependen de un parámetro real $a \in \mathbb{R}$.

Durante todo este problema nos situaremos en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x, y, z, t) respecto a la base canónica $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Consideremos el endomorfismo $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ respecto a la base canónica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ a & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un real.

(a) Determinar el polinomio característico $P_u \in \mathbb{R}[X]$ y los valores propios de u. Deducir que existe un valor propio triple λ_1 y un valor propio simple λ_2.

(b) Determinar el espacio propio V_{λ_2} asociado al valor propio λ_2 y dar una base de dicho sub-espacio.

[3] Notar que sobre $\mathbb{C}$, esto **no** implica que $a = b = 0$.

(c) Probar que existe exactamente un valor a_0 del parámetro $a \in \mathbb{R}$ tal que el sub-espacio propio V_{λ_1} asociado al valor propio λ_1 es de dimensión $d_1 > 1$. Determinar una base de V_{λ_1} según el caso $a = a_0$ o bien $a \neq a_0$. ¿Es u diagonalizable?

(d) En cada caso $a = a_0$ o $a \neq a_0$, determinar la forma canónica de Jordan de u.

Solución:

(a) Calculamos, desarrollando primero la última fila y luego la primera fila:

$$
\begin{aligned}
P_u(X) = \det(X\mathrm{I}_4 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & X-3 & -1 & 0 \\ -a & 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3)\begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -a & 1 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= (X-3)(X-2)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)(X-3)(X^2-4X+3+1) \\
&= (X-2)^3(X-3),
\end{aligned}
$$

por lo que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio triple y $\lambda_2 = 3$ es un valor propio simple.

(b) Para determinar V_{λ_2} calculamos $\ker(A - 3\mathrm{I}_4)$ resolviendo el sistema

$$
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - t &= 0 \\ x + z &= 0 \\ ax - y - 2z + t &= 0 \end{cases}
$$

de donde obtenemos $t = -x$ y $z = -x$ y luego $y = ax - 2z + t = ax + 2x - x = (a+1)x$. Luego, $V_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, a+1, -1, -1)$ es una recta.

(c) Para determinar V_{λ_1} calculamos $\ker(A - 2\mathrm{I}_4)$ resolviendo el sistema

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ ax - y - z &= 0 \end{cases}
$$

Así, sumando las últimas dos ecuaciones obtenemos $(a+1)x = 0$. Si $a \neq -1$, obtenemos $x = 0$ y luego obtenemos que V_{λ_2} está dado por las ecuaciones $x = t = y + z = 0$, i.e., V_{λ_1} es la recta generada por $(0, 1, -1, 0)$.

Si $a = a_0 := -1$ las dos últimas ecuaciones son equivalentes y obtenemos que V_{λ_1} está dado por las ecuaciones $t = x + y + z = 0$, i.e., $V_{\lambda_1} \cong \mathbb{R}^2$ es un plano generado por los vectores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 1, -1, 0)$.

En ambos casos, la multiplicidad geométrica $\mathrm{mult}_{\mathrm{geom}}(\lambda_1) = \dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_1}) \in \{1, 2\}$ es estrictamente menor que la multiplicidad algebraica $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1) = 3$, por lo que u no es diagonalizable en ningún caso.

(d) Para determinar la forma canónica de Jordan basta determinar el bloque de Jordan asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$ utilizando el algoritmo descrito en §23:

i) Si $a \neq -1$ entonces $d_1 = \dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_1}) = 1$ y luego sólo hay un bloque de Jordan asociado a $\lambda_1 = 2$, que debe ser de tamaño 3×3. Así,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es la forma canónica de Jordan de u.

ii) Si $a = -1$ entonces $d_1 = 2$ y luego hay 2 bloques de Jordan de tamaño ≥ 1 asociados a $\lambda_1 = 2$. Calculamos $(A - 2\mathrm{I}_4)^2$ y obtenemos

$$(A - 2\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $d_2 = \dim_{\mathbb{R}} \ker((A - 2\mathrm{I}_4)^2) = 3$. Luego, hay $d_2 - d_1 = 1$ bloque de Jordan de tamaño ≥ 2 asociado a $\lambda_1 = 2$ y concluímos que

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es la forma canónica de Jordan de u.

Problema 3 (35 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar las formas bilineales reales obtenidas al considerar la parte real y la parte imaginaria de una forma hermitiana compleja.

Durante este problema nos situaremos en el espacio hermitiano $\mathbb{C}^n$, con coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$ respecto a la base canónica $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ escribiremos $z_j = x_j + iy_j$, donde $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Sea

$$h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \ (z, w) \longmapsto h(z, w)$$

una forma hermitiana en $\mathbb{C}^n$. Definimos para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$ las aplicaciones a valores reales

$$B(z, w) := \mathrm{Re}(h(z, w)) \quad \text{y} \quad \omega(z, w) := -\mathrm{Im}(h(z, w)).$$

Así, $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ y $\omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ son aplicaciones a valores reales, y además $h = B - i\omega$. Más aún, podemos considerar a B y ω como aplicaciones $B : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ y $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ al definir

$$B((x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), (x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n)) := B((x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n), (x'_1 + iy'_1, \ldots, x'_n + iy'_n))$$

y

$$\omega((x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), (x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n)) := \omega((x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n), (x'_1 + iy'_1, \ldots, x'_n + iy'_n)).$$

(a) Probar que $B : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal *real* simétrica y que $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal *real* alternada.

(b) Probar que si $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es un producto escalar complejo en $\mathbb{C}^n$, entonces $B : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ define un producto escalar real en $\mathbb{R}^{2n}$.

(c) Probar que para todos $z, w \in \mathbb{C}^n$ se tiene que $\omega(z, iw) = B(z, w)$. Deducir que si $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es un producto escalar complejo en $\mathbb{C}^n$, entonces $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal alternada *no-degenerada* en $\mathbb{R}^{2n}$ (i.e., define una *forma simpléctica*[4] en $\mathbb{R}^{2n}$).

(d) Sea $h(z, w) = z_1\overline{w_1} + \ldots + z_n\overline{w_n}$ el producto escalar estándar en $\mathbb{C}^n$. Determinar $A := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)$ y $\Omega := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$, las matrices de las formas bilineales reales B y ω asociadas a h respecto a la base canónica[5] $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Solución:

(a) La forma hermitiana $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal respecto a la primera variable (en particular, $\mathbb{R}$-lineal) y $\mathbb{C}$-antilineal respecto a la segunda. Luego, para $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que $h(z, \lambda w) = \overline{\lambda} h(z, w) = \lambda h(z, w)$ pues $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, tanto $B(z, w) = \mathrm{Re}(h(z, w))$ como $\omega(z, w) = -\mathrm{Im}(h(z, w))$ son $\mathbb{R}$-bilineales. Más aún, dado que h es hermitiana tenemos que

$$h(z, w) = B(z, w) - i\omega(z, w) = \overline{h(w, z)} = B(w, z) + i\omega(w, z),$$

por lo que $B(z, w) = B(w, z)$ y $\omega(z, w) = -\omega(w, z)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$, i.e., B es simétrica y ω es alternada.

(b) Vimos en §43 que la forma cuadrática hermitiana $Q(z) = h(z, z)$ en $\mathbb{C}^n$ es también la forma cuadrática real en $\mathbb{R}^{2n}$ asociada a $B(z, w)$, i.e., $Q(z) = \mathrm{Re}(h(z, z)) = B(z, z)$. Luego, si h es definida positiva entonces B también lo es.

(c) Dado que h es una forma hermitiana tenemos que $h(z, iw) = -ih(z, w)$ y luego

$$h(z, iw) = B(z, iw) - i\omega(z, iw) = -i(B(z, w) - i\omega(z, w)) = -\omega(z, w) - iB(z, w)$$

y por ende (comparando las partes imaginarias) tenemos que $B(z, w) = \omega(z, iw)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$. En particular, dado que $i(x_j + iy_j) = -y_j + ix_j$, para todo $z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ no-nulo existe $iz := (-y_1, x_1, -y_2, x_2, \ldots, -y_n, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ no-nulo tal que $\omega(z, iz) = B(z, z) > 0$. En particular, la forma bilineal alternada $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es no-degenerada.

(d) Notamos que $Q(z) = h(z, z) = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = x_1^2 + y_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_n^2$ es la forma cuadrática asociada al producto escalár estándar en $\mathbb{R}^{2n}$, por lo que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B) = \mathrm{I}_{2n}$ es la matriz identidad. Por otra parte, notamos que gracias al punto (c) tenemos que

$$\omega(z, w) = B(z, -iw) = -B(z, iw)$$

y luego para $z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ y $w = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ en $\mathbb{R}^{2n}$ tenemos[6] que

$$\begin{aligned} \omega(z, w) &= -\langle (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), (-v_1, u_1, \ldots, -v_n, u_n) \rangle \\ &= \langle (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), (v_1, -u_1, \ldots, v_n, -u_n) \rangle \\ &= (x_1 v_1 - u_1 y_1) + (x_2 v_2 - u_2 y_2) + \ldots + (x_n v_n - u_n y_n), \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\Omega = \left(\begin{array}{c:c:c} A_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & A_n \end{array}\right),$$

donde $A_1 = \ldots = A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

[4] Ver Certamen 2, Problema 3.

[5] Explícitamente, si escribimos cada vector $v_j = e_j + if_j$ de la base canónica $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$, entonces obtenemos $\mathscr{B} = (e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$.

[6] Alternativamente, notar que $(x_j + iy_j)\overline{(u_j + iv_j)} = x_j u_j + y_j v_j - i(x_j v_j - u_j y_j)$.