

CERTAMEN 3 – ÁLGEBRA LINEAL AVANZADA (MAT210, 2025-1)

PROFESOR: PEDRO MONTERO, AYUDANTE: MADELINE CASTRO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Problema 1 (30 puntos)

Sea $V := M_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de matrices cuadradas $n \times n$, con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n^2$. En V definimos la forma bilineal simétrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB).$$

- (a) (15 pts) Pruebe que la forma bilinear simétrica anterior define un producto interno en V .

Indicación: Considere $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matriz arbitraria y calcule explícitamente $\text{tr}({}^tAA)$.

- (b) (15 pts) Pruebe que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son matrices simétricas entonces $(\text{tr}(AB))^2 \leq \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2)$.

Solución:

- (a) Si escribimos ${}^tAA = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ entonces, calculamos $b_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0$ y luego $\text{tr}({}^tAA) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0$, y $\langle A, A \rangle = 0$ equivale a que $a_{k,i} = 0$ para todo $i, k \in \{1, \dots, n\}$, i.e., $A = 0$. Así, la forma bilinear simétrica es definida positiva, i.e., un producto interno.

- (b) La desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simétricas (i.e., ${}^tA = A$, ${}^tB = B$) implica que

$$\text{tr}(AB)^2 = \text{tr}({}^tAB)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle A, B \rangle^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}({}^tAA) \text{tr}({}^tBB) = \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2).$$

Problema 2 (20 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$ un número real. Considere la forma cuadrática $Q_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q_a(x, y, z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

Determine la signatura (p, q) y el rango de Q_a para todo $a \in \mathbb{R}$.

Indicación: La respuesta depende de los posibles valores que tome $a \in \mathbb{R}$.

Solución: Aplicando el método de reducción de Gauss obtenemos

$$\begin{aligned} Q_a(x, y, z) &= x^2 + 2xy + ((1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 - 2ayz) = (x+y)^2 + ay^2 + (1+a+a^2)z^2 - 2ayz \\ &= (x+y)^2 + a(y^2 - 2yz) + (1+a+a^2)z^2 = (x+y)^2 + a(y-z)^2 + (1+a^2)z^2. \end{aligned}$$

Así, si $a < 0$ (resp. $a = 0$, resp. $a > 0$) Q_a tiene signatura $(2, 1)$ (resp. $(2, 0)$, resp. $(3, 0)$) y rango 3 (resp. 2, resp. 3).

Problema 3 (30 puntos)

Sea V un k -espacio vectorial de dimensión finita n , y sea $U \subseteq V$ un sub-espacio vectorial. Recordemos que el **anulador** de U se define como el sub-espacio vectorial

$$U^\circ = \{f \in V^*, f(u) = 0 \text{ para todo } u \in U\} \subseteq V^*.$$

- (a) (15 pts) Pruebe que existe una aplicación lineal *canónica*¹ $\varphi : U^\circ \rightarrow (V/U)^*$.

Indicación: Puede utilizar, por ejemplo, la propiedad universal del cociente.

- (b) (15 pts) Pruebe que φ es inyectiva y deduzca que $U^\circ \cong (V/U)^*$.

Solución:

- (a) Sea $f \in U^\circ$. Dado que $U \subseteq \ker(f)$, la propiedad universal del cociente implica que existe una única función lineal $\hat{f} : V/U \rightarrow k$ tal que $\hat{f}([v]) = f(v)$ para todo $v \in V$. Así, $\hat{f} \in (V/U)^*$ y definimos $\varphi(f) := \hat{f}$.

- (b) Dado que $\hat{f}([v]) = f(v)$ para todo $v \in V$, si $\varphi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f} = 0$ entonces $f(v) = \hat{f}([v]) = 0$ y luego $f = 0$, i.e., φ es inyectiva. Como $\dim_k(U^\circ) = \dim_k(V) - \dim_k(U) = \dim_k((V/U)) = \dim_k((V/U)^*)$, tenemos que φ es una aplicación lineal inyectiva entre k -espacios vectoriales de la misma dimensión y por lo tanto un isomorfismo (Teorema del rango).

¹es decir, cuya definición no depende de elección de bases.

Problema 4 (30 puntos)

En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual y la base canónica $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ considere el sub-espacio vectorial

$$U := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 = z + t\}.$$

- (a) (10 pts) Determine una base ortonormal de U .
- (b) (10 pts) Determine la matriz de la proyección ortogonal $p_U : V \rightarrow V$ respecto a la base $\mathcal{B}$.
- (c) (10 pts) Sea $p_0 = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ arbitrario. Determine una fórmula explícita para $d(p_0, U)$.

Solución:

- (a) Las ecuaciones de U implican que $x = -y, z = -t$ y luego $p = (x, y, z, t) = (x, -x, z, -z) = x(e_1 - e_2) + z(e_3 - e_4)$ y luego $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 0, 1, -1)$ forman una base de U . Notar que $v_1 \perp v_2$ y luego basta dividir por su norma para obtener $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ y $u_2 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ base ortonormal de U .
- (b) Sabemos que $p_U(x) = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2$ y luego calculamos $p_U(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, y de manera análoga $p_U(e_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $p_U(e_3) = \left(0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $p_U(e_4) = \left(0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Así,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (c) Sabemos que $d(p_0, U) = \|p_0 - p_U(p_0)\|$. Por el ítem (b), tenemos que

$$p_U(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x - y, y - x, z - t, t - z) \text{ y luego } (x, y, z, t) - p_U(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x + y, x + y, z + t, z + t),$$

$$\text{de donde obtenemos } d(p_0, U) = \frac{1}{2}\sqrt{2(x+y)^2 + 2(z+t)^2} = \sqrt{\frac{(x+y)^2 + (z+t)^2}{2}} \text{ para todo } p_0 = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

Bonus (10 pts): Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas reales tal que A es definida positiva.

- (B1) Pruebe que existe una matriz real simétrica definida positiva $C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = A$.
- (B2) Pruebe que AB es diagonalizable.

Indicación: Analice la matriz $M := CBC \in M_n(\mathbb{R})$, donde C es la matriz del ítem (B1), y calcule CMC^{-1} .

Solución:

- (B1) Dado que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, es diagonalizable en una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, i.e., $A = PD^tP$ donde $P \in O_n(\mathbb{R})$ y D matriz diagonal con valores propios (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Si $\tilde{D}$ es la matriz diagonal donde reemplazamos cada λ_i por $\sqrt{\lambda_i} > 0$, entonces $C := P\tilde{D}^tP$ cumple $C^2 = P\tilde{D}^tP\tilde{D}^tP = P\tilde{D}^2P \stackrel{\text{def}}{=} PD^tP = A$.
- (B2) Notar que M es simétrica pues ${}^tM = {}^tC {}^tB {}^tC = CBC \stackrel{\text{def}}{=} M$ y luego existen $Q \in O_n(\mathbb{R})$ y $S \in M_n(\mathbb{R})$ diagonal tal que $M = QS^tQ = QSQ^{-1}$. Así, $CMC^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} C(CBC)C^{-1} = AB$ y luego $AB = (CQ)S(CQ)^{-1}$ es diagonalizable.