Certamen 2 – Álgebra Lineal Avanzada (MAT210, 2025-1)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Madeline Castro

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (40 puntos)

Sea $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y sea[1] $\xi := \exp(2\pi i/m) := \cos(\frac{2\pi}{m}) + i\sin(\frac{2\pi}{m})$.

(a) (10 pts) Pruebe que el polinomio $P(X) = (X^m - 1) \in \mathbb{C}[X]$ tiene como raíces $1 = \xi^0, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{m-1}$. Determine si dichas raíces son simples o no.

Indicación: Considere $z_k := \xi^k$ para $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ y analice cuándo $z_k = z_\ell$ para $k \neq \ell$.

(b) (10 pts) Pruebe que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es tal que $A^m = \mathrm{I}_n$, entonces A es diagonalizable.

(c) (10 pts) Pruebe que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz real de $P(X) = X^m - 1$ entonces necesariamente $z = 1$ o $z = -1$.

Indicación: Notar que $\xi^k \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\xi^k = \overline{\xi^k}$ y que esto último es más fácil de verificar usando la forma polar. Notar además que si $2k = nm$ con $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ entonces $nm < 2m$.

(d) (10 pts) Pruebe que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es tal que $A^m = \mathrm{I}_n$ y tal que A es diagonalizable, entonces $A^2 = \mathrm{I}_n$.

Indicación: Escriba $P^{-1}AP = D$ con $D \in M_n(\mathbb{R})$ matriz diagonal. Deduzca que necesariamente $D^2 = \mathrm{I}_n$

Solución:

(a) Por propiedades de la exponencial (o por Teorema de De Moivre en MAT060) tenemos que $z_k := \xi^k$ cumple $z_k^m = \xi^{mk} = \exp(2\pi i k m/m) = \exp(2\pi i k) = 1$, i.e., $P(z_k) = 0$. Sean $k, \ell \in \{0, \ldots, m-1\}$ diferentes y sean $z_k = \xi^k$ y $z_\ell = \xi^\ell$, entonces (usando la notación exponencial, por ejemplo)

$$z_k = z_\ell \Leftrightarrow \exp(2\pi i(k-\ell)/m) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi i(k-\ell)}{m} = 2\pi i n \text{ para cierto } n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k - \ell = mn \text{ para cierto } n \in \mathbb{Z}.$$

Así, k y ℓ tienen el mismo resto al dividir por m y luego, como $k, \ell \in \{0, \ldots, m-1\}$, tenemos que $k = \ell$.

(b) Por definición de polinomio minimal, $m_A(X)$ divide a $P(X) = (X^m - 1)$ y luego, gracias al ítem (a), $m_A(X)$ también tiene raíces simples. Luego, A es diagonalizable.

(c) Si $P(z) = 0$ entonces $z = \xi^k$ para cierto $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. Si $k = 0$ entonces $z = 1$ es real. Supongamos que $k \geq 1$ y notemos que

$$\xi^k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos(\tfrac{2\pi k}{m}) + i\sin(\tfrac{2\pi k}{m}) = \cos(\tfrac{2\pi k}{m}) - i\sin(\tfrac{2\pi k}{m}) \Leftrightarrow \sin(\tfrac{2\pi k}{m}) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{2\pi k}{m} = \pi n \text{ para cierto } n \in \mathbb{Z}$$

y así $2k = nm$, donde $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ necesariamente. Como $nm = 2k < 2m$ tenemos que $1 \leq n < 2$ y luego $n = 1$, i.e., $k = \frac{m}{2}$ y por ende $z = \xi^{m/2} = \exp(\frac{2\pi i}{m} \cdot \frac{m}{2}) = \exp(\pi i) = -1$.

(d) Por el mismo argumento del ítem (b), $m_A \in \mathbb{R}[X]$ divide a $P(X)$. Como A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, m_A escinde sobre $\mathbb{R}$ y por ende sus raíces son reales. Así, los únicos valores propios de A son ± 1 por el ítem (c). Luego, si $P^{-1}AP = D$ con D matriz diagonal, entonces $D^2 = \mathrm{I}_n$ y por ende $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = \mathrm{I}_n$, de donde deducimos que $A^2 = \mathrm{I}_n$.

Problema 2 (30 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$ y considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

donde $P_A(X) = X(X-1)(X^2 + (a+1)X + 1)$. Además, puede usar directamente (sin demostración) el hecho que si $a = -3$ entonces $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_4) = 3$ en tal caso.

(a) (20 pts) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que A sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

(b) (10 pts) Suponga que $a = -3$. Determine la forma canónica de Jordan de A en tal caso[2].

Solución:

(a) El discriminante del polinomio cuadrático $Q(X) = X^2 + (a+1)X + 1$ es $\Delta = (a+1)^2 - 4 = (a+3)(a-1)$. Así, P_A tiene raíces reales si y sólo si $\Delta \geq 0$, i.e., $a \in I$ con $I :=]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$. Notamos que $Q(0) = 1 \neq 0$ y que $Q(1) = a + 3$ es raíz solamente cuando $a = -3$. Así, podemos identificar los casos siguientes:

---

[1] Recuerde que $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ y que $\exp(i\pi) = -1$.

[2] Note que no se pide calcular la matriz de cambio de base $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = J$. Sólo se pide determinar $J \in M_4(\mathbb{R})$.

- **Caso 1.** Si $a \in I \setminus \{-3, 1\}$: En tal caso todas las raíces de P_A son reales y distintas, y por ende A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
- **Caso 2.** Si $a = 1$ entonces $P_A(X) = X(X-1)(X+1)^2$ y luego debemos analizar el valor propio $\lambda = -1$:

$$V_{-1} = \ker(A + \mathrm{I}_4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((0,1,0,-1))$$

  y luego $2 = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(-1) > \mathrm{mult}_{\mathrm{geom}}(-1) = 1$, por lo que A **no** es diagonalizable.
- **Caso 3.** Si $a = -3$ entonces $P_A(X) = X(X-1)^3$ y luego debemos analizar el valor propio $\lambda = 1$. Por la indicación del enunciado, $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_4) = 3$ y luego el Teorema del Rango implica que $V_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker(A - \mathrm{I}_4) = 1$. Así, como en el Caso 2, tenemos que A no es diagonalizable en este caso.

(b) En este caso $P_A(X) = X(X-1)^3$, y luego $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ son los valores propios de A. Para $\lambda_1 = 0$ tenemos que $1 \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{geom}}(\lambda_1) \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1$ y por ende[3] $\dim_{\mathbb{R}} V_0 = 1$, y luego la forma canónica de Jordan de A tiene $d_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim_{\mathbb{R}} V_0 = 1$ bloques de Jordan, que forman una matriz de Jordan de tamaño $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1) = 1$. De manera análoga, por el análisis en el Caso 3 en el ítem (a), para $\lambda_2 = 1$ tenemos $d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1$ bloques de Jordan, que forman una matriz de Jordan de tamaño $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_2) = 3$. Así, A es semejante a la forma canónica de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3 (10 puntos)

Considere la matriz real simétrica

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Pruebe que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Bonus (10 puntos) Pruebe que lo anterior puede ser **falso** si $A \in M_2(\mathbb{C})$ es una matriz compleja simétrica.

Solución: Notamos que $P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - b^2)$ tiene discriminante $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2$ y luego $\Delta \geq 0$ al ser una suma de cuadrados en $\mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$ entonces P_A tiene dos raíces distintas y por ende A es diagonalizable, mientras que si $\Delta = 0$ entonces necesariamente $b = 0$ y $a = d$, i.e., $A = a\,\mathrm{I}_2$ y por ende es diagonalizable.

Bonus: Si $a = 2$, $b = i \in \mathbb{C}$ y $d = 0$ entonces $\Delta = 0$ y luego A posee un valor propio de multiplicidad algebraica 2. Dado que A no es un múltiplo de la identidad, tenemos que A no es diagonalizable.

Problema 4 (30 puntos)

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $(A + \mathrm{I}_n)^2 = 0$.

(a) (10 pts) Pruebe que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y calcule $\det(A)$.

Indicación: Es conveniente encontrar primero explícitamente $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $AB = \mathrm{I}_n$. Luego, considere $N := A + \mathrm{I}_n$ y determine las raíces de $P_N(X)$. Relacione el polinomio P_A con P_N para determinar los valores propios de A.

(b) (10 pts) Determine la forma canónica de Jordan de A.

Indicación: Exprese su respuesta en términos de las dimensiones $d_k(\lambda) := \dim_{\mathbb{C}}((A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^k)$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de A y donde $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Use esto para describir cuántos bloques de Jordan hay y de qué tamaño.

(c) (10 pts) Pruebe que A^{-1} y A tienen la misma forma canónica de Jordan, y luego pruebe que A es semejante a A^{-1}.

Solución:

(a) Como $(A + \mathrm{I}_n)^2 = A^2 + 2A + \mathrm{I}_n = 0$, tenemos $A(-A - 2\,\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$ y luego $B := -A - 2\,\mathrm{I}_n$ es la inversa de A, i.e., $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Como $N := A + \mathrm{I}_n$ es nilpotente, sabemos que $P_N(X) = X^n$ y luego la única raíz de $P_N(X) = \det(X\,\mathrm{I}_n - N) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det((X-1)\,\mathrm{I}_n - A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} P_A(X-1)$ es 0 y por ende la única raíz de P_A es $\lambda = -1$. Así, $\det(A) = (-1)^n$.

(b) Por el ítem (a), $\lambda = -1$ es el único valor propio de A. Sea $d := d_1 := \dim_{\mathbb{C}} \ker(A + \mathrm{I}_n)$ y notar que $d_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \ker((A + \mathrm{I}_n)^2) = n$. Así, por el algoritmo visto en clases, tenemos que hay d bloques de Jordan y $d_2 - d_1 = n - d$ bloques de Jordan de tamaño 2, i.e., de la forma[4]

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) $A^{-1} = -A - 2\,\mathrm{I}_n$ tiene cómo único valor propio $\lambda^{-1} = -1$ (pues $Av = \lambda v$ equivale a $\lambda^{-1} v = A^{-1} v$; cf. Ayudantía 4). Así, la forma canónica de Jordan de A^{-1} se calcula mediante $d_1 = \dim_{\mathbb{C}} \ker(-A - 2\,\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_n) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(-A - \mathrm{I}_n) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(A + \mathrm{I}_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} d$ y del mismo modo $d_2 = n$. Así, A^{-1} tiene el mismo valor propio y mismos bloques de Jordan que A. Luego, $P^{-1}AP = J = Q^{-1}A^{-1}Q$ para $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y por ende $A = R^{-1}A^{-1}R$ con $R := QP^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

[3] Alternativamente, se puede calcular explícitamente que $V_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-1, 3, -3, 1))$.

[4] De hecho, esto implica que $n = 2 \cdot (n - d) + 1 \cdot d = 2n - d$ y por ende $n = d$, i.e., A es diagonalizable.