Certamen 2 MAT210

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

Instrucciones Generales:

- La evaluación comenzará a las 10:00 AM del día Sábado 20 de Junio de 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 22:30 PM del día Sábado 20 de Junio de 2020.
- Lea con cuidado cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, concisa y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones vistas en el curso y en la ayudantía, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. En particular, todas las respuestas deben desarrollarse **usando la notación del curso**. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `C2_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.
- **Importante:** El objetivo de este certamen es desarrollar correctamente tres problemas, el objetivo **no es** terminar todo el certamen. Específicamente:
  (a) Cada estudiante debe escoger 3 problemas a desarrollar, entre un total de 5 problemas.
  (b) En la primera página, junto con su nombre, se deben mencionar los 3 problemas escogidos.
  (c) Sólo se corregirán 3 problemas. En caso de que una persona desarrolle más de 3 problemas, sólo se considerarán los 3 primeros de acuerdo al orden en que aparezcan en la hoja de respuestas.
  (d) Adicionalmente a los 3 problemas escogidos, se podrán desarrollar problemas "Bonus" de manera totalmente opcional para tener puntos extra. La corrección de los problemas "Bonus" será dicotómica (0 o 5 puntos, no habrá puntaje intermedio).

Notación: Durante todo el Certamen, denotaremos por k un cuerpo arbitrario (a menos que se especifique lo contrario) y por V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n \geq 1$.

Tabla de puntajes: Puntaje base: 1 punto.

P1	(a)	(b)	(c)	(d)	P2	(a)	(b)	(c)	(d)
	10	10	3	10		10	3	10	10
P3	(a)	(b)	(c)	(d)	P4	(a)	(b)	(c)	(d)
	3	10	10	10		10	3	10	10
P5	(a)	(b)	(c)	(d)					
	3	10	10	10					

B	B1	B2	B3	B4	B5	B6
	5	5	5	5	5	5

Problema 1 (33 puntos)

El objetivo de este problema es demostrar una versión multiplicativa de la descomposición de Dunford para elementos en $\mathrm{GL}(V)$. Decimos que un endomorfismo $u : V \to V$ es **unipotente** si $u - \mathrm{Id}_V$ es nilpotente. Concretamente, probaremos que todo automorfismo $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tal que $P_\varphi(X) \in k[X]$ escinde sobre k, se escribe de manera única como $\varphi = \varphi_s \circ \varphi_u$, donde φ_s es diagonalizable, φ_u es unipotente, y donde $\varphi_s \circ \varphi_u = \varphi_u \circ \varphi_s$.

(a) Sea $u : V \to V$ un endomorfismo unipotente. Probar que $u \in \mathrm{GL}(V)$.

(b) Sea $\varphi : V \to V$ un automorfismo de V, i.e., $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tal que $P_\varphi(X) \in k[X]$ escinde sobre k, y sea $\varphi = \varphi_s + \varphi_n$ la descomposición de Dunford de φ, donde φ_s es diagonalizable y φ_n es nilpotente. Probar que $\varphi_s \in \mathrm{GL}(V)$.

(c) Sean φ, φ_s y φ_n como en el punto (b). Probar que $\varphi = \varphi_s \circ \varphi_u$, donde $\varphi_u := \varphi_s^{-1} \circ \varphi_n + \mathrm{Id}_V$. Demostrar que φ_u es unipotente y que $\varphi_s \circ \varphi_u = \varphi_u \circ \varphi_s$.

(d) Sean φ, φ_s y φ_u como en el punto (c). Supongamos que $\varphi = \widetilde{\varphi}_s \circ \widetilde{\varphi}_u = \widetilde{\varphi}_u \circ \widetilde{\varphi}_s$ para otros $\widetilde{\varphi}_s, \widetilde{\varphi}_u \in \mathrm{GL}(V)$, con $\widetilde{\varphi}_s$ diagonalizable y $\widetilde{\varphi}_u$ unipotente. Probar que $\varphi = \widetilde{\varphi}_s + \widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)$ es la descomposición de Dunford (usual) de φ y concluir que necesariamente $\widetilde{\varphi}_s = \varphi_s$ y $\widetilde{\varphi}_u = \varphi_u$.

Solución:

(a) Dado que $u - \mathrm{Id}_V$ es nilpotente, se tiene que $(u - \mathrm{Id}_V)^r = 0$ para cierto $r \leq \dim_k(V)$. En particular, $m_u(X)$ divide $P(X) = (X-1)^r$ y luego el único valor propio (múltiple) de u es $\lambda = 1$. Luego, $\det(u) = 1 \neq 0$ por lo que $u \in \mathrm{GL}(V)$.

(b) Por construcción, φ y φ_s tienen los mismos valores propios. En particular, $\det(\varphi_s) = \det(\varphi) \neq 0$ y luego $\varphi_s \in \mathrm{GL}(V)$.

(c) Dado que φ_s y φ_n conmutan, se tiene que $\varphi_u - \mathrm{Id}_V = \varphi_s^{-1} \circ \varphi_n$ y luego $(\varphi_u - \mathrm{Id}_V)^r = (\varphi_s^{-1})^r \circ \varphi_n^r = 0$, donde $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ es el índice de nipotencia de φ_n, por lo que φ_u es unipotente. Por otra parte, dado que φ_s y φ_n conmutan, se tiene que

$$\varphi_s \circ \varphi_u = \varphi_s \circ (\varphi_s^{-1} \circ \varphi_n + \mathrm{Id}_V) = \varphi_n + \varphi_s = \varphi_s + \varphi_n = (\mathrm{Id}_V + \varphi_n \circ \varphi_s^{-1}) \circ \varphi_s = (\mathrm{Id}_V + \varphi_s^{-1} \circ \varphi_n) \circ \varphi_s = \varphi_u \circ \varphi_s.$$

(d) Dado que $\widetilde{\varphi}_s$ y $\widetilde{\varphi}_u$ conmutan, tenemos que $(\widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V))^r = \widetilde{\varphi}_s^r \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)^r = 0$, donde r es el índice de nilpotencia de $\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V$. Por otra parte, $\varphi_s \circ (\widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)) = (\widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)) \circ \widetilde{\varphi}_s$ pues $\widetilde{\varphi}_s$ y $\widetilde{\varphi}_u$ conmutan. Así, $\widetilde{\varphi}_s$ es diagonalizable, $\widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)$ es nilpotente, y ellos conmutan. Luego, por unicidad de la descomposición de Dunford, tenemos que $\varphi_s = \widetilde{\varphi}_s$ y $\varphi_n = \widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)$. De la última igualdad (y del hecho que $\varphi_s = \widetilde{\varphi}_s$ es invertible) se deduce que $\varphi_u = \varphi_s^{-1} \circ \varphi_n + \mathrm{Id}_V = \varphi_s^{-1} \circ (\widetilde{\varphi}_s \circ (\widetilde{\varphi}_u - \mathrm{Id}_V)) + \mathrm{Id}_V = \widetilde{\varphi}_u$.

Problema 2 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar el **cono** de endomorfismos nilpotentes en dimensión 2.

Durante este problema, denotaremos por $V = M_2(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de matrices 2×2 con coeficientes reales, y por $\mathscr{N} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ el sub-conjunto[1] de matrices nilpotentes.

(a) Probar que $\mathscr{N}$ está contenido en espacio vectorial $T \subseteq V$ dado por las matrices de traza nula, i.e., $T = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

(b) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to T$ dada por

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}.$$

Probar que φ es lineal y que es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. En todo lo que sigue, identificaremos $\mathbb{R}^3$ y T, via el isomorfismo φ.

[1] Sabamos que $\mathscr{N} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ **no** es un sub-espacio vectorial (c.f. Guía 3 de Ejercicios, Ejercicio 1.(b)).

(c) Demostrar que $\mathscr{N}$ es un **cono** $\mathscr{C}$ (en el sentido usual) de $\mathbb{R}^3$. Más precisamente, $\varphi^{-1}(\mathscr{N})$ está dado por la ecuación de un cono $a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2 = c(z-z_0)^2$ para ciertos $a,b,c \in \mathbb{R}^{>0}$ y $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ a determinar.

(d) Demostrar que las clases de semejanza de matrices **invertibles y diagonalizables** (sobre $\mathbb{R}$) de T están dadas por hiperboloides de una hoja que son exteriores al cono $\mathscr{N}$. Más precisamente, sea $A \in T$ invertible y diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, y sea

$$\mathscr{C}(A) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid B = P^{-1}AP, \text{ para cierta } P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$$

el conjunto de matrices semejantes a A, probar que $\mathscr{C}(A) \subseteq T$ y que $\varphi^{-1}(\mathscr{C}(A))$ está dado por la ecuación de un hiperboloide de una hoja $\alpha(x-x_1)^2+\beta(y-y_1)^2-\gamma(z-z_1)^2 = d^2$ para ciertos $\alpha,\beta,\gamma,d \in \mathbb{R}^{>0}$ y $(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ a determinar.
Indicación: Probar que necesariamente $\det(A) = -d^2 < 0$ *para cierto* $d \in \mathbb{R}^{>0}$ *y justificar adecuadamente que para* $B \in T$ *de traza nula, se tiene que* $B \in \mathscr{C}(A)$ *si y sólo si* $\det(B) = \det(A)$.

Solución:

(a) Sabemos que $A \in M_2(\mathbb{R})$ es nilpotente si y sólo si $P_A(X) = X^2$. En particular, $\lambda = 0$ es el único valor propio (doble) y luego $\mathrm{tr}(A) = 0+0 = 0$. Luego, $\mathscr{N} \subseteq T$.

(b) Claramente $\varphi(x,y,z) \in T$ pues $\mathrm{tr}(\varphi(x,y,z)) = x-x = 0$, y además $\varphi(\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2, \lambda z_1+z_2) = \lambda\varphi(x_1,y_1,z_1)+\varphi(x_2,y_2,z_2)$ pues cada coeficiente de la matriz está definido por una forma lineal, por lo que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to T$ es lineal. Dado que $\mathbb{R}^3$ y T tienen la misma dimensión (pues T está definido por una ecuación lineal $\mathrm{tr}(A) = 0$ en el espacio $V \cong \mathbb{R}^4$), basta probar que φ es inyectivo: si $\varphi(x,y,z) = 0$ entonces $x = 0$ y $y-z = y+z = 0$, de donde se deduce $y = z = 0$. Luego, $\varphi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} T$ es un isomorfismo.

(c) Sea $A \in T$. Entonces $P_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + \det(A)$, por lo que $A \in \mathscr{N}$ si y sólo si $\det(A) = 0$. Equivalentemente, $(x,y,z) \in \varphi^{-1}(\mathscr{N})$ si y sólo si $\det(\varphi(x,y,z)) = -x^2-(y+z)(y-z) = -x^2-y^2+z^2 = 0$. Luego, $\varphi^{-1}(\mathscr{N}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2+y^2\}$ es un cono en $\mathbb{R}^3$ centrado en el origen.

(d) Sea $A \in T$ invertible y diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Si $B \in \mathscr{C}(A)$ entonces $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A) = 0$, y luego $\mathscr{C}(A) \subseteq T$. Por otra parte, $\det(A) \neq 0$ y $P_A(X) = X^2+\det(A)$. Luego, dado que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, necesariamente $\det(A) < 0$ (en caso contrario P_A no posee raíces reales). Sea $d^2 := -\det(A) > 0$, entonces $P_A(X) = X^2-d^2 = (X-d)(X+d)$ tiene dos raíces distintas. Finalmente, si $B \in T$ matriz de traza nula con $P_B(X) = X^2+\det(B)$ entonces $\det(B) = \det(A) = -d^2$ implica que B es diagonalizable con valores propios $\lambda_1 = d$ y $\lambda_2 = -d$, por lo que es necesariamente semejante a A. Así,

$$\varphi^{-1}(\mathscr{C}(A)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \det(\varphi(x,y,z)) = \det(A) = -d^2\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = d^2\}$$

es un hiperboloide de una hoja (exterior al cono nilpotente $z^2 = x^2+y^2$).

Problema 3 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar las formas bilineales **alternadas** (definidas en §9 del curso) usando los métodos vistos para estudiar formas bilineales simétricas en §29 y §30 del curso.

Sea V un k-espacio vectorial de $\dim_k(V) = n$, donde $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Sea $B : V \times V \to k$ forma bilineal alternada, i.e., $B(x,y) = -B(x,y)$ para todos $x,y \in V$. Decimos que una forma bilineal alternada $\omega : V \times V \to k$ es una **forma simpléctica** si ω es no-degenerada, i.e., $\mathrm{rg}(B) = n$. Por otro lado, decimos que una matriz $A \in M_n(k)$ es **antisimétrica** si ${}^{\mathrm{t}}A = -A$.

(a) Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal. Probar que B es alternada si y sólo si la matriz $A_{\mathscr{B}} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)$ es antisimétrica para toda base $\mathscr{B}$ de V. Deducir que si V posee una forma simpléctica $\omega : V \times V \to k$ entonces necesariamente $\dim_k(V) = n$ es par.

(b) Sea $\omega : V \times V \to k$ una forma simpléctica. Dado $U \subseteq V$ un sub-espacio vectorial, definimos su **complemento simpléctico** como

$$U^{\omega} := \{y \in V \mid \omega(x,y) = 0 \text{ para todo } x \in U\},$$

y diremos que U es un sub-espacio **simpléctico** (resp. **lagrangiano**) si $U \cap U^\omega = \{0\}$ (resp. $U = U^\omega$). Probar que para todo sub-espacio $U \subseteq V$ se tiene que $\dim_k(V) = \dim_k(U) + \dim_k(U^\omega)$ y que $U = (U^\omega)^\omega$, y deducir que si U es un sub-espacio simpléctico (resp. lagrangiano) entonces $V = U \oplus U^\omega$ (resp. $\dim(U) = \frac{1}{2}\dim_k(V)$).
Indicación: Considerar el isomorfismo $\widehat{\omega} : V \to V^*$, $y \mapsto \omega(\cdot, y)$ y probar que $U^\omega = \widehat{\omega}^{-1}(U^\circ)$.

(c) Sea $\omega : V \times V \to k$ una forma simpléctica, y escribamos $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$ (gracias al punto (a)). Sea $e_1 \in V \smallsetminus \{0\}$ vector no-nulo. Probar que existe $\widetilde{f_1} \in V \smallsetminus \{0\}$ tal que $\lambda := \omega(e_1, \widetilde{f_1}) \neq 0$. Sea $f_1 := \frac{1}{\lambda}\widetilde{f_1} \in V$, probar que $\omega(e_1, f_1) = 1$ y deducir que $\mathscr{B}_1 = (e_1, f_1)$ es una familia linealmente independiente. Calcular la matriz (respecto a la base $\mathscr{B}_1$) de la forma simpléctica dada por la restricción $\omega|_{U_1} : U_1 \times U_1 \to k$, donde $U_1 := \mathrm{Vect}_k(e_1, f_1)$.

(d) Sea $U_1 \subseteq V$ como en (c), y definamos $U_2 := U_1^\omega \subseteq V$. Probar que $V = U_1 \oplus U_2$ y que la restricción $\omega|_{U_2} : U_2 \times U_2 \to k$ es simpléctica (i.e., no degenerada). Deducir, por inducción en la dimensión, que para <u>toda</u> forma simpléctica $\omega : V \times V \to k$ existe una base $\mathscr{B} = (e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_m, f_m)$ de V tal que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$ está dada por la matriz diagonal por bloques

$$\Omega = \left(\begin{array}{c:c:c} A_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & A_m \end{array}\right),$$

donde $A_1 = \ldots = A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(k)$.
Indicación: Probar que $U_1 \cap U_1^\omega = \{0\}$ y concluir usando (a) que $V = U_1 \oplus U_1^\omega$. Para probar que $\omega|_{U_2}$ es no-degenerada verificar que $\{x \in U_2 \mid \omega(x, y) = 0\ \forall y \in U_2\} = U_2 \cap U_2^\omega$ y concluir usando que $(U_1^\omega)^\omega = U_1$.

Solución:

(a) Sea $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de V. Si B es alternada entonces $A_{\mathscr{B}} = (B(e_i, e_j))$ cumple ${}^{\mathrm{t}}A_{\mathscr{B}} = (B(e_j, e_i)) = (-B(e_i, e_j)) = -A_{\mathscr{B}}$, i.e., $A_{\mathscr{B}}$ es una matriz antisimétrica. Por otro lado, si $A_{\mathscr{B}}$ es antisimétrica, entonces para todos $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ se cumple $B(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} B(e_i, e_j) x_i y_j = -\sum_{1 \le i,j \le n} B(e_j, e_i) y_j x_i = -B(y, x)$, i.e., B es alternada. En particular, si ω es una forma simpléctica con $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega) \in M_n(k)$ entonces ${}^{\mathrm{t}}\Omega = -\Omega$ implica que $\det({}^{\mathrm{t}}\Omega) = \det(\Omega) = (-1)^n \det(\Omega) \neq 0$ y luego necesariamente n es par (sino $\det(\Omega) = -\det(\Omega) = 0$).

(b) Notar que $U^\omega = \{y \in V \mid \omega(x, y) = 0\ \forall x \in U\} = \{y \in V \mid \widehat{\omega}(y)(x) = 0\ \forall x \in U\} = \{y \in V \mid \widehat{\omega}(y) \in U^\circ\} = \widehat{\omega}^{-1}(U^\circ)$. En particular, dado que ω es no-degenerada (i.e., $\widehat{\omega}$ es un isomorfismo) se tiene que $U^\omega \cong U^\circ$. Luego, $\dim_k(U^\omega) = \dim_k(U^\circ) = \dim_k(V) - \dim_k(U)$, de donde se deduce que si $U \cap U^\omega = \{0\}$ (resp. $U = U^\omega$) entonces $V = U \oplus U^\omega$ (resp. $\dim_k(V) = 2\dim_k(U)$). Finalmente, notar que $U \subseteq (U^\omega)^\omega$ (pues todo $x \in U$ cumple $\omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0$ para todo $y \in U^\omega$) y ambos tienen la misma dimensión (pues $\dim_k(V) = \dim_k(U) + \dim(U^\omega) = \dim(U^\omega) + \dim((U^\omega)^\omega)$), por lo que necesariamente $U = (U^\omega)^\omega$.

(c) Por definición, ω es no-degenerada si para todo $x = e_1 \in V$ no-nulo existe $y := \widetilde{f_1} \in V$ (necesariamente no-nulo) tal que $\lambda := \omega(x, y) \neq 0$. En particular, $\omega(e_1, f_1) = \frac{1}{\lambda}\omega(e_1, \widetilde{f_1}) = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 = -\omega(f_1, e_1)$. Notar que si $\alpha e_1 + \beta f_1 = 0$ entonces

$$0 = \omega(e_1, \alpha e_1 + \beta f_1) = \alpha \underbrace{\omega(e_1, e_1)}_{=0} + \beta \underbrace{\omega(e_1, f_1)}_{=1} = \beta$$

y de manera similar $0 = \omega(\alpha e_1 + \beta f_1, f_1) = \alpha$, por lo que $\mathscr{B}_1 = (e_1, f_1)$ es una familia linealmente independiente. Dado que $\omega(e_1, e_1) = \omega(f_1, f_1) = 0$, $\omega(e_1, f_1) = 1$ y $\omega(f_1, e_1) = -1$ tenemos que

$$A_1 := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\omega|_{U_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Sea $x \in U_1 \cap U_1^\omega$, i.e., $x = ae_1 + bf_1 \in U_1$ verifica $\omega(x,y) = 0$ para todo $y \in U_1$. En particular, $\omega(x,e_1) = -b = 0$ y $\omega(x,f_1) = a = 0$, por lo que $U_1 \cap U_1^\omega = \{0\}$ y, gracias al punto (a), tenemos que $V = U_1 \oplus U_1^\omega = U_1 \oplus U_2$. Para probar que $\omega|_{U_2}$ es no-degenerada notamos que

$$\{x \in U_2 \mid \omega(x,y) = 0 \ \forall y \in U_2\} = \{x \in U_2 \mid x \in U_2^\omega\} = U_2 \cap U_2^\omega = U_1^\omega \cap (U_1^\omega)^\omega = U_1^\omega \cap U_1 = \{0\},$$

por lo que $\omega|_{U_2}$ es no-degenerada. Luego, por inducción, el espacio U_2 de dimensión $2m-2 = 2(m-1)$ posee una base $\mathscr{B}_2 = (e_2, f_2, \ldots, e_m, f_m)$ tal que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\omega|_{U_2})$ es una matriz $(2m-2)\times(2m-2)$ diagonal por bloques, con cada bloque igual a la matriz $A_1 \in \mathrm{GL}_2(k)$ (del punto (c)). Considerando la base $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ de V obtenemos $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$ de la forma deseada.

Observación (cultura general): Notar que si reordenamos la base $\mathscr{B} = (e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m)$ en la base $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ obtenemos la matriz por bloques $A_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}$. Usualmente se dice que la base $\mathscr{C}$ es una **base simpléctica** o **base de Darboux** de la forma simpléctica ω.

Problema 4 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar el sistema diferencial que describe la posición de una partícula cargada en un campo magnético en dirección del eje z en el espacio $\mathbb{R}^3$. Específicamente, consideremos el sistema diferencial lineal de segundo orden

$$(S)\begin{cases} x''(t) = \omega y'(t) \\ y''(t) = -\omega x'(t) \\ z''(t) = 0 \end{cases}$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ es una constante no-nula que depende de la masa y de la carga de la partícula, así como de la magnitud del campo magnético.

(a) Resolver la ecuación diferencial $z''(t) = 0$ separadamente (decimos que esta ecuación está *desacoplada*).

(b) Considerar el cambio de variable **complejo** $u(t) := x'(t) + iy'(t)$. Deducir que la función diferenciable $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface una EDO homogénea lineal de la forma $u'(t) + \lambda u(t) = 0$ para cierta constante compleja $\lambda \in \mathbb{C}$ a determinar.

(c) Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $u'(t) + \lambda u(t) = 0$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es la constante encontrada en (c), y encontrar todas[2] las soluciones reales del sistema diferencial (S).
Indicación: El espacio de soluciones reales de (S) es isomorfo a $\mathbb{R}^6$.

(d) Determinar la única trayectoria cuya posición inicial es $(x(0), y(0), z(0)) = (0,0,0)$ y cuya velocidad inicial es $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (\omega, \omega, 1)$.

Solución:

(a) Integrando dos veces (o resolviendo la ecuación característica $P(\lambda) = \lambda^2 = 0$) obtenemos $z(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Tenemos que $u'(t) = x''(t) + iy''(t) = \omega y'(t) - i\omega x'(t) = -i\omega(x'(t) + iy'(t))) = -i\omega u(t)$.

(c) La solución de $u'(t) + i\omega u(t) = 0$ está dada por $u(t) = u_0 e^{-i\omega t}$ para $u_0 \in \mathbb{C}$. Si escribimos $u_0 = c + id$ con $c, d \in \mathbb{R}$, entonces $u(t) = (c+id)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$ y luego $x'(t) = \mathrm{Re}(u(t)) = c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t)$ e

[2] **Recuerdo:** $\int \cos(bt)\, dt = \frac{1}{b}\sin(bt) + c$ y $\int \sin(bt)\, dt = -\frac{1}{b}\cos(bt) + c$. **Sugerencia:** Para encontrar soluciones reales, escribir la condición inicial $u_0 \in \mathbb{C}$ como $u_0 = c + id$ con $c, d \in \mathbb{R}$.

$y'(t) = \mathrm{Im}(u(t)) = d\cos(\omega t) - c\sin(\omega t)$. Integrando $x'(t)$ e $y'(t)$ obtenemos $x(t) = c'\sin(\omega t) - d'\cos(\omega t) + e$ e $y(t) = d'\sin(\omega t) + c'\cos(\omega t) + f$, donde $c' = c/\omega$, $d' = d/\omega$ y donde e y f son constantes reales. Así,

$$\begin{cases} x(t) = c'\sin(\omega t) - d'\cos(\omega t) + e \\ y(t) = d'\sin(\omega t) + c'\cos(\omega t) + f \\ z(t) = at + b \end{cases}$$

es la solución general de (S), donde $a, b, c', d', e, f \in \mathbb{R}$ son constantes reales.

(d) La condición inicial $(x(0), y(0), z(0)) = (0,0,0)$ implica que $e - d' = c' + f = b = 0$, mientras que $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (\omega, \omega, 1)$ implica $c'\omega = \omega$, $d'\omega = \omega$ y $a = 1$, por lo que $(a, b, c', d', e, f) = (1, 0, 1, 1, 1, -1)$ y la trayectoria buscada está descrita por

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\omega t) - \cos(\omega t) + 1 \\ y(t) = \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - 1 \\ z(t) = t \end{cases}$$

Observación: Se trata de un movimiento helicoidal, típico en electromagnetismo.

Problema 5 (33 puntos)

El objetivo de este problema es explorar geométricamente la dualidad entre sub-espacios de un espacio vectorial y los sub-espacios de su dual, así como la relación entre espacios cocientes y espacios duales. Como siempre, identificaremos a todo espacio vectorial de dimensión finita V con su bidual V^{**} y, en particular, para $U \subseteq V$ y $W \subseteq V^*$ sub-espacios vectoriales, definimos:

$$U^\circ = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in U\} \subseteq V^* \quad \text{y} \quad W^\circ = \{x \in V \mid f(x) = 0 \ \forall f \in W\} \subseteq V.$$

En particular, $(V^\circ)^\circ = V$ y $(W^\circ)^\circ = W$ (puede usar estas identidades directamente, sin tener que probarlas).

Sea V un k-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, fijo durante todo el problema. Definimos el **espacio proyectivo** asociado a V como el conjunto cuyos elementos son los sub-espacios vectoriales de dimensión 1 de V. Específicamente,

$$\mathbb{P}(V) := \{L \subseteq V \mid \dim_k(L) = 1\}.$$

(a) Consideremos $\mathbb{P}(V^*) = \{\ell \subseteq V^* \mid \dim_k(\ell) = 1\}$ el espacio proyectivo asociado al espacio dual V^* de V, y sea $\mathscr{H}(V)$ el conjunto cuyos elementos son los *hiperplanos* en V. En otras palabras, definimos $\mathscr{H}(V) = \{H \subseteq V \mid \dim_k(H) = n-1\}$. Demostrar que la función

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{H}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V^*) \\ H &\longmapsto H^\circ \end{aligned}$$

está bien definida (i.e., $H^\circ \in \mathbb{P}(V^*)$), y que es una biyección entre los conjuntos $\mathscr{H}(V)$ y $\mathbb{P}(V^*)$.

(b) Sea $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de V (fija para el resto del problema), y sea $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la correspondiente base dual de V^*. Para cada recta $L = \mathrm{Vect}_k(v) \in \mathbb{P}(V)$ generada por un vector $v \in V \setminus \{0\}$ con coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ respecto a la base $\mathscr{B}$, definimos el conjunto

$$H_L := \{x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in V \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}.$$

Probar que la definición de H_L no depende del vector director v que genera L, verificar que $H_L = \ker(f)$ para cierta forma lineal $f \in V^* \setminus \{0\}$, y deducir que $H_L \in \mathscr{H}(V)$ es un hiperplano. Demostrar que la función $\Psi : \mathbb{P}(V) \to \mathscr{H}(V)$ dada por

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathscr{H}(V) \\ L &\longmapsto H_L \end{aligned}$$

es biyectiva.
Indicación: Para la inyectividad de Ψ, probar que si $\ker(f_1) = \ker(f_2)$ para ciertos $f_1, f_2 \in V^* \setminus \{0\}$ entonces f_1 y f_2 son proporcionales. Para la sobreyectividad, probar que todo hiperplano H se escribe como $H = \ker(f)$ para algún $f \in V^* \setminus \{0\}$.

(c) Deducir que existe una biyección $\delta : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$. Describirla en términos de coordenadas respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}^*$.

(d) Sea $U \subseteq V$ un sub-espacio vectorial, y sea $f \in U^\circ \subseteq V^*$. Probar que f induce una única forma lineal $\widehat{f} : V/U \to k$ tal que $\widehat{f}([v]) = f(v)$ para todo $v \in V$, y deducir que la aplicación

$$\begin{aligned} u : U^\circ &\longrightarrow (V/U)^* \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.[3]

Solución:

(a) Sabemos que $\dim_k(V^*) = \dim_k(V) = \dim_k(U) + \dim_k(U^\circ)$ para todo $U \subseteq V$ sub-espacio vectorial. En particular, si $H \subseteq V$ es un hiperplano (i.e., $\dim_k(H) = n-1$) entonces $\dim_k(H^\circ) = n-(n-1) = 1$, luego $H^\circ \subseteq V^*$ pertenece a $\mathbb{P}(V^*)$. Del mismo modo, si $\ell \subseteq V^*$ es una recta en V^* (i.e., $\dim_k(\ell) = 1$) entonces $\dim_k(\ell^\circ) = n-1$, por lo que $\ell^\circ \subseteq V$ pertenece a $\mathscr{H}(V)$. Dado que $(H^\circ)^\circ = H$ y $(\ell^\circ)^\circ = \ell$, tenemos que $\Phi : \mathscr{H}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ es biyectiva, con inversa dada por $\Phi^{-1} : \mathbb{P}(V^*) \to \mathscr{H}(V)$, $\ell \mapsto H_\ell := \ell^\circ$.

(b) Sea $L = \mathrm{Vect}_k(v) \subseteq V$ con $v = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ vector director. Si $v' \in L \setminus \{0\}$ es otro vector director con coordenadas $(a'_1, \ldots, a'_n)$ respecto a $\mathscr{B}$, entonces $v' = \lambda v$ para cierto escalar $\lambda \neq 0$ (i.e., $a'_i = \lambda a_i$ para todo i). En particular,

$$H_L = \{x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\} = \{x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V \mid a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = 0\}$$

está bien definido. Más aún, $H_L = \ker(f)$ donde $f = a_1e_1^* + \ldots + a_ne_n^* \in V^*$ es no-nula (pues el vector $(a_1, \ldots, a_n)$ es no-nulo). Así, el teorema del rango implica que $n = \dim_k(H_L) + \mathrm{rg}(f)$ y luego $\dim_k(H_L) = n-1$, por lo que $H_L \in \mathscr{H}(V)$.

Finalmente, notar que si $\ker(f_1) = \ker(f_2) \subseteq V$ para $f_1, f_2 \in V^* \setminus \{0\}$ entonces $\ker(f_1)^\circ = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in \ker(f_1)\}$ es de dimensión 1 y contiene a f_1 y f_2, por lo que f_1 y f_2 son proporcionales. En otras palabras, $H_L = H_{L'}$ implica que $L = L'$ (i.e., Ψ es inyectiva). Para la sobreyectividad, notar que todo hiperplano H cumple $H = (H^\circ)^\circ$ por lo que si escribimos $H^\circ = \mathrm{Vect}_k(f) \subseteq V^*$ para cierta $f \in V^* \setminus \{0\}$ entonces $H = (\mathrm{Vect}_k(f))^\circ = \ker(f)$. Más aún, si $f = a_1e_1^* + \ldots + a_ne_n^* \in V^* \setminus \{0\}$, entonces basta tomar la recta $L \subseteq V$ generada por $v = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ para tener $H = H_L$.

(c) La composición $\delta := \Phi \circ \Psi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ es biyectiva. En coordenadas, consideramos la recta L generada por $v = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ no-nulo y lo enviamos por Ψ al hiperplano $H_L = \ker(f)$, donde $f = a_1e_1^* + \ldots + a_ne_n^*$. Luego, enviamos por Φ el hiperplano H_L a su ortogonal $H_L^\circ = \ker(f)^\circ = \mathrm{Vect}_k(f)$. En otras la palabras, la recta generada por $v = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ va a parar por δ en la recta generada por $f = a_1e_1^* + \ldots + a_ne_n^*$.

(d) Dado que $f \in U^\circ$ tenemos que $U \subseteq \ker(f)$ y luego, gracias a la propiedad universal del cociente, existe una única aplicación lineal $\widehat{f} : V/U \to k$ tal que $\widehat{f}([v]) = f(v)$ para todo $v \in V$. En particular $\widehat{f} \in V^*$. Claramente $u : U^\circ \to (V/U)^*$ es lineal, y además $u(f) = \widehat{f} = 0$ en $(V/U)^*$ implica que $f(v) = \widehat{f}([v]) = 0$ para todo $v \in V$, i.e., $f = 0$ y luego u es inyectiva. Finalmente, notamos que $\dim_k(U^\circ) = \dim_k(V) - \dim_k(U) = \dim_k(V/U) = \dim_k((V/U)^*)$ por lo que u es una aplicación lineal inyectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión, y luego u es un isomorfismo.

Bonus (30 puntos)

(B1) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices reales que son semejantes sobre $\mathbb{C}$, i.e., existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tales que $A = P^{-1}BP$ (o bien, $PA = BP$). Probar que ellas son semejantes sobre $\mathbb{R}$, i.e., existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = Q^{-1}BQ$ (o bien, $QA = BQ$).
Indicación: Escribir $P = S + iT$, donde $S, T \in M_n(\mathbb{R})$, considerar el polinomio real $d(t) = \det(P + tT)$ en $\mathbb{R}[t]$ y probar que existe un real $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q(t_0) := S + t_0T$ es invertible. **Solución:** Si

[3] En particular, utilizando las biyecciones estudiadadas en este problema, también podemos pensar a $\mathbb{P}(V)$ como el conjunto de todos los espacios cocientes de V de dimensión 1.

escribimos $P = S + iT$ entonces $PA = BP$ equivale a $(S + iT)A = SA + iTA = B(S + iT) = BS + iBT$, por lo que $SA = BS$ y $TA = BT$. Por otro lado, el polinomio real $d(t)$ es no-nulo, pues $d(i) \neq 0$. Luego, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $d(t_0) \neq 0$, i.e, tal que $Q := Q(t_0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Finalmente, notamos que

$$QA = (S + t_0T)A = SA + t_0TA = BS + t_0BT = B(S + t_0T) = BQ.$$

(B2) Bajo las mismas hipótesis y con la misma notación del Problema 2, probar que las clases de semejanza de matrices **invertibles y <u>no</u> diagonalizables** (sobre $\mathbb{R}$) de T están dadas por hiperboloides de dos hojas que son interiores al cono $\mathscr{N}$. Más precisamente, sea $A \in T$ invertible y no-diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, y sea $\mathscr{C}(A)$ el conjunto de matrices semejantes a A, probar que $\varphi^{-1}(\mathscr{C}(A))$ está dado por la ecuación de un hiperboloide de dos hojas $\alpha(x - x_1)^2 + \beta(y - y_1)^2 - \gamma(z - z_1)^2 = -d^2$ para ciertos $\alpha, \beta, \gamma, d \in \mathbb{R}^{>0}$ y $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ a determinar.
Solución: Sea $A \in T$ invertible y **no diagonalizable** sobre $\mathbb{R}$. Dado que $P_A(X) = X^2 + \det(A)$ tenemos que necesariamente $\det(A) := d^2 > 0$ para cierto $d \in \mathbb{R}^{>0}$. En particular, A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, pues P_A tiene dos raíces complejas distintas. Tal como en el Problema 2(d), tenemos que si $B \in T$ verifica $\det(B) = \det(A) = d^2$ entonces A y B son semejantes sobre $\mathbb{C}$, i.e., existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tal que $A = P^{-1}BP$. Gracias a (B1), A y B son semejantes sobre $\mathbb{R}$ también. Luego,

$$\varphi^{-1}(\mathscr{C}(A)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \det(\varphi(x, y, z)) = \det(A) = d^2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -d^2\}$$

es un hiperboloide de dos hojas (interior al cono nilpotente $z^2 = x^2 + y^2$).

(B3) Sea $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea $A \in M_n(k)$ una matriz $n \times n$ con $P_A(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$. Demostrar (usando el teorema de Cayley-Hamilton) que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n$, se tiene que A^k es combinación lineal de las matrices $\mathrm{I}_n, A, \ldots, A^{n-1}$. Deducir que existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in k$ tales que

$$\exp(A) = a_0\mathrm{I}_n + a_1A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}.$$

En otras palabras, $\exp(A) = P(A)$ para cierto polinomio $P \in k[X]$.
Indicación: Para demostrar la existencia de los coeficientes a_j (dados por ciertas series de potencias, cuya convergencia debe justificarse), probar que si $A^k = \lambda_{k,0}I_n + \lambda_{k,1}A + \ldots + \lambda_{k,n-1}A^{n-1}$ entonces $|\lambda_{k,j}| \leq (2M)^k$ para todo $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, donde $M = \max\{1, |b_0|, \ldots, |b_{n-1}|\}$.
Solución: Sea $P_A(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$ el polinomio característico de A. Entonces, el teorema de Cayley-Hamilton implica que $P_A(A) = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_1A + b_0\mathrm{I}_n = 0$, por lo que $A^n = -b_{n-1}A^{n-1} - \ldots - b_1A - b_0\mathrm{I}_n$ es combinación lineal de $\mathrm{I}_n, A, \ldots, A^{n-1}$. Por inducción, sea A^k con $k \geq n$ tal que $A^k = \lambda_{k,0}\mathrm{I}_n + \lambda_{k,1}A + \ldots + \lambda_{k,n-1}A^{n-1}$, entonces $A^{k+1} = A \cdot A^k = \lambda_{k,0}A + \lambda_{k,1}A^2 + \ldots + \lambda_{k,n-2}A^{n-1} + \lambda_{k,n-1}A^n$ y, dado que A_n es combinación de $\mathrm{I}_n, A, \ldots, A^{n-1}$, concluimos que

$$\begin{aligned}A^{k+1} &= \lambda_{k,0}A + \lambda_{k,1}A^2 + \ldots + \lambda_{k,n-2}A^{n-1} + \lambda_{k,n-1}(-b_{n-1}A^{n-1} - \ldots - b_1A - b_0\mathrm{I}_n)\\ &= -b_0\lambda_{n-1}\mathrm{I}_n + (\lambda_{k,0} - \lambda_{k,n-1}b_1)A + (\lambda_{k,1} - \lambda_{k,n-1}b_2)A^2 + \ldots + (\lambda_{k,n-2} - \lambda_{k,n-1}b_{n-1})A^{n-1}\end{aligned}$$

también lo es.[4] Finalmente, si escribimos para todo $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \lambda_{k,0}\mathrm{I}_n + \lambda_{k,1}A + \ldots + \lambda_{k,n-1}A^{n-1}$$

entonces el cálculo anterior implica que $\lambda_{k+1,0} = -b_0\lambda_{k,n-1}$ y que $\lambda_{k+1,j} = \lambda_{k,j-1} - \lambda_{k,n-1}b_j$ para todos $j = 1, \ldots, n-1$. En particular, si asumimos por inducción que $|\lambda_{k,j}| \leq (2M)^k$, entonces

$$|\lambda_{k+1,0}| \leq |b_0||\lambda_{k,n-1}| \leq M\cdot(2M)^k \leq (2M)^{k+1} \quad \text{y} \quad |\lambda_{k+1,j}| \leq |\lambda_{k,j-1}|+|\lambda_{k,n-1}||b_j| \leq (2M)^k+(2M)^k\cdot M \leq (2M)^{k+1}.$$

Luego,

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k,0}}{k!}\right)\mathrm{I}_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k,1}}{k!}\right)A + \ldots + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k,n-1}}{k!}\right)A^{n-1},$$

donde cada serie $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k,j}}{k!}\right)$ converge a cierto a_j puesto que $\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k,j}}{k!}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2M)^k}{k!} = e^{2M}$.

[4] Otra alternativa: Considerar la división euclideana del polinomio $P(X) = X^k$ de grado $k \geq n$ por el polinomio característico $P_A(X)$, de donde obtenemos $X^k = P_A(X)Q(X) + R(X)$ con $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(P_A) = n$ y luego $A^k = P_A(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ es una combinación lineal de $\mathrm{I}_n, A, \ldots, A^{n-1}$.

(B4) Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $x, y \in V$ dos vectores. Demostrar que si $f(x) = f(y)$ para todo $f \in V^*$ entonces $x = y$.
Indicación: Argumentar por contradicción y tratar separadamente el caso en que x e y son linealmente dependientes y el caso en que son linealmente independientes.
Solución: Supongamos por contradicción que x, y son distintos y verifican $f(x) = f(y)$ para todo $f \in V^*$. Si $e_1 = x$ y $e_2 = y$ son linealmente independientes podemos completar en una base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ de V, y considerar la respectiva base dual $\mathscr{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$. En particular, se tiene que $e_1^*(x) = 1$ y $e_1^*(y) = 0$, lo cual es imposible. Luego, necesariamente x e y son linealmente dependientes (y al menos uno de los dos es no-nulo): si $x \neq 0$ entonces $y = \lambda x$ para cierto $\lambda \neq 1$. Completamos el vector $e_1 = x$ en una base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ de V, y consideramos la respectiva base dual $\mathscr{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$. Luego, $e_1^*(x) = 1$ y $e_1^*(y) = \lambda \neq 1$, lo cual es imposible. Concluimos que necesariamente $x = y$.

(B5) Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal no-degenerada. Probar que para toda forma lineal $f \in V^*$ existe un único vector $y_f \in V$ tal que $f(x) = B(y_f, x)$ para todo $x \in V$.
Solución: Dado que $B : V \times V \to k$ es no-degenerada, la aplicación lineal $\breve{B} : V \to V^*$, $y \mapsto B(y, \cdot)$ es un isomorfismo. En particular, para todo $f \in V^*$ existe un único $y = y_f \in V$ tal que $f = \breve{B}(y_f)$. En otras palabras, existe un único $y_f \in V$ tal que $f(x) = \breve{B}(y_f)(x) = B(y_f, x)$ para todo $x \in V$.[5]

(B6) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz <u>real</u>. Definimos el **coseno** $\cos(A) \in M_n(\mathbb{R})$ de A (resp. **seno** $\sin(A) \in M_n(\mathbb{R})$ de A) como la parte real (resp. imaginaria) de la matriz compleja $e^{iA} \in M_n(\mathbb{C})$. Calcular

$$\cos\begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sin\begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$.
Solución: La descomposición de Dunford de iA es

$$iA = \begin{pmatrix} i\theta & i \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix}}_{=S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} e^{iA} &= e^{i\theta}\mathrm{I}_n \cdot (\mathrm{I}_2 + N) = e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) + i\sin(\theta) & -\sin(\theta) + i\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, $\cos(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ y $\sin(A) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

[5]La generalización de este resultado a dimensión infinita (notablemente a espacios de Hilbert) es lo que se conoce como el **Teorema de representación de Riesz**.