Certamen 1 MAT210

Nombre y apellido : ______________________________

ROL : ______________________________

INSTRUCCIONES GENERALES:

- La evaluación comenzará a las 10:00 AM del día Sábado 16 de Mayo 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 22:30 PM del día Sábado 16 de Mayo 2020.
- Lea con cuidado cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, concisa y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones allí vistas, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. En particular, todas las respuestas deben desarrollarse **usando la notación del curso**. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `C1_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.
- **Importante:** El objetivo de este certamen es desarrollar correctamente tres problemas, el objetivo **no es** terminar todo el certamen. Específicamente:
  (a) Cada estudiante debe escoger 3 problemas a desarrollar, entre un total de 5 problemas.
  (b) En la primera página, junto con su nombre, se deben mencionar los 3 problemas escogidos.
  (c) Sólo se corregirán 3 problemas. En caso de que una persona desarrolle más de 3 problemas, sólo se considerarán los 3 primeros de acuerdo al orden en que aparezcan en la hoja de respuestas.
  (d) Adicionalmente a los 3 problemas escogidos, se podrán desarrollar problemas "Bonus" de manera totalmente opcional para tener puntos extra. La corrección de los problemas "Bonus" será dicotómica (0 o 5 puntos, no habrá puntaje intermedio).

Notación: Durante todo el Certamen, denotaremos por k un cuerpo arbitrario (a menos que se especifique lo contrario) y por V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n \geq 1$.

Tabla de puntajes: Puntaje base: 1 punto.

P1	(a)	(b)	(c)	(d)	P2	(a)	(b)	(c)	(d)
	3	10	10	10		3	10	10	10
P3	(a)	(b)	(c)	(d)	P4	(a)	(b)	(c)	(d)
	10	3	10	10		10	10	3	10
P5	(a)	(b)	(c)	(d)					
	10	3	10	10					

B	B1	B2	B3	B4	B5	B6
	5	5	5	5	5	5

Problema 1 (33 puntos)

El objetivo de este problema es utilizar la diagonalización de matrices para estudiar ciertas sucesiones definidas mediante recurrencias.

Sea $\mathscr{S}(a,b)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial cuyos elementos son sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales verificando la relación de recurrencia lineal

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Utilizaremos directamente (sin necesidad de demostrarlo[1]) el hecho que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{S}(a,b)) = 2$.

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $v_n := u_{n+1}$ y consideramos el vector columna

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n$, para cierta matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ a determinar, y concluir usando inducción que $\mathbf{X}_n = A^n\mathbf{X}_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Suponer que el polinomio real $P(X) = X^2 - aX - b$ posee dos raíces reales distintas $\mu < \lambda$. Probar que existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ para ciertas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Indicación: No se pide calcular explícitamente $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ni tampoco las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Basta justificar su existencia.

(c) Plantear (sin resolver) un sistema de ecuaciones que permita determinar α y β en función de u_0 y u_1, y probar que dicho sistema admite una única solución (que no se pide calcular).

(d) Consideremos la sucesión de Fibonacci definida recursivamente por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{N}$:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ldots$$

Demostrar, usando los puntos anteriores (y sin calcular la matriz P), que

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $v_{n+1} = u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n = av_n + bu_n$ y luego

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \\ av_n + bu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}}_{:=A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A\mathbf{X}_n.$$

En particular $\mathbf{X}_1 = A\mathbf{X}_0$. Si suponemos que $\mathbf{X}_n = A^n\mathbf{X}_0$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces la relación $\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n$ implica que $\mathbf{X}_{n+1} = A \cdot A^n\mathbf{X}_0 = A^{n+1}\mathbf{X}_0$, de donde se concluye el resultado por inducción.

[1] En efecto, la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está determinada por los valores iniciales (u_0, u_1). Ver (Apunte, Ejemplo 2.1.(2)).

(b) Calculamos el polinomio característico de A mediante $P_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - aX - b$. Por hipótesis, dicho polinomio posee dos raíces distintas (los valores propios de A) y luego A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, i.e., existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tal que $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$. De lo anterior, se concluye directamente que $A^n = P\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}P^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, gracias al punto (a) sabemos que $\mathbf{X}_n = A^n\mathbf{X}_0$ por lo que mirando la primera coordenada u_n del vector $\mathbf{X}_n$ y considerando las respectivas mutliplicaciones matriciales, concluímos que $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ para ciertas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que dependen de $\mathbf{X}_0$ y de P.

(c) Dado que $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha\lambda + \beta\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Dicho sistema posee una única solución $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ puesto que el determinante de la matriz asociada es $\mu - \lambda \neq 0$ (pues λ y μ son raíces diferentes).

(d) En este caso $a = b = 1$ y las raíces de $P_A(X) = X^2 - X - 1$ están dadas por $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Si resolvemos el sistema del punto (c) para $(u_0, u_1) = (0, 1)$ obtenemos $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, de donde se obtiene la fórmula pedida: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

Problema 2 (33 puntos)

El objetivo de este problema es probar que la restricción de un endomorfismo diagonalizable a un sub-espacio estable es también diagonalizable.

Sea $u : V \to V$ un endomorfismo y $W \subseteq V$ un sub-espacio vectorial. Supongamos que $W \neq \{0\}$ es **estable** por u, i.e., $u(W) \subseteq W$ y denotemos por $u_W := u|_W : W \to W$, $w \mapsto u(w)$ la restricción de u a W.

(a) Supongamos que u es diagonalizable y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in k$ los valores propios (diferentes) de u. Demostrar que todo vector $w \in W$ se escribe de manera única como suma $w = w_1 + \ldots + w_p$, donde $w_j \in V_{\lambda_j}$ para $j \in \{1, \ldots, p\}$. Deducir que si $p = 1$ (i.e., u posee sólo un valor propio) entonces W posee una base formada por vectores propios de $u_W : W \to W$ y luego u_W es diagonalizable.

(b) Supongamos que $p \geq 2$ y sea $w \in W$ arbitrario. Deducir que el vector $\widehat{w} := (u - \lambda_p \mathrm{Id}_V)(w)$ pertenece a W y que se escribe de la forma $\widehat{w} = \sum_{j=1}^{p-1}(\lambda_j - \lambda_p)w_j$, donde $w_j \in V_{\lambda_j}$ para $j \in \{1, \ldots, p-1\}$.

(c) Demostrar, mediante inducción en $p \geq 1$ (y usando los puntos anteriores), que W admite una base formada por vectores propios de $u_W : W \to W$ (i.e., que u_W es diagonalizable).
Indicación: Dado $w \in W$, probar que en la escritura $w = w_1 + \ldots + w_p$ necesariamente $w_j \in W$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.

(d) Probar que si $u : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable y $W \subseteq V$ es un sub-espacio estable por u, entonces W posee un suplementario estable por u (i.e., existe $W' \subseteq V$ tal que $V = W \oplus W'$ y $u(W') \subseteq W'$).

Solución:

(a) Dado que u es diagonalizable, tenemos que $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}$ es suma directa de los espacios propios de u. Así, por definición de suma directa, todo vector w de W se escribe de manera única como suma $w = w_1 + \ldots + w_p$, donde $w_j \in V_{\lambda_j}$. En particular, si $p = 1$ y $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ una base arbitraria de W, entonces $e_j \in V_{\lambda_1}$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ y luego $u_W(e_j) = u(e_j) = \lambda_1 e_j$. Luego, W admite una base de vectores propios de u_W, i.e., el endomorfismo u_W de W es diagonalizable.

(b) Dado que W es estable, tenemos que para todo $w \in W$ se tiene $u(w) \in W$. En particular, la combinación lineal $\widehat{w} = (u - \lambda_p \mathrm{Id}_v)(w) = u(w) - \lambda_p w \in W$. Si consideramos la escritura única $w = w_1 + \ldots + w_p$, donde $w_j \in V_{\lambda_j}$, entonces

$$\widehat{w} = u(w) - \lambda_p w = (\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_p w_p) - \lambda_p(w_1 + \ldots + w_p) = (\lambda_1 - \lambda_p)w_1 + \ldots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)w_{p-1}.$$

(c) Sea $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ una base arbitraria de W. Si denotamos $w := e_i$ con $i \in \{1, \ldots, m\}$ y escribimos $w = w_1 + \ldots + w_p$ como en el punto (a), veamos por inducción en p que cada w_j pertenece a W: el punto (b) implica que $\widehat{w} = (\lambda_1 - \lambda_p)w_1 + \ldots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)w_{p-1}$. Luego, la hipótesis inductiva en el caso $p-1$ implica que cada vector $(\lambda_1 - \lambda_p)w_1, \ldots, (\lambda_{p-1} - \lambda_p)w_{p-1}$ pertenece a W. Dado que los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son dos a dos diferentes, se tiene que $(\lambda_j - \lambda_p)w_j \in W$ implica que $w_j \in W$. Finalmente, $w_p = w - (w_1 + \ldots + w_{p-1}) \in W$ y luego todo vector de la base $\mathscr{B}$ es combinación lineal de vectores propios de u_W. En particular, si escribimos $e_i = w_{i,1} + \ldots + w_{i,p}$ con $w_{i,j} \in V_{\lambda_j} \cap W$, la familia $\mathscr{F} = (w_{1,1}, \ldots, w_{1,p}, \ldots, w_{m,1}, \ldots, w_{m,p})$ genera W y está formada por vectores propios de u_W. Luego, podemos extraer de $\mathscr{F}$ una base $\mathscr{B}_W$ de W formada por vectores propios de u_W.

(d) Si $W = \{0\}$ podemos considerar $W' = V$. Si $W \neq \{0\}$ entonces sabemos gracias a los puntos anteriores que W admite una base $\mathscr{B}_W = (e_1, \ldots, e_m)$ formada por vectores propios. Si agrupamos los vectores de $\mathscr{B}_W$ en función del espacio propio al cual pertenecen, i.e., si consideramos $\mathscr{B}_j := \mathscr{B}_W \cap V_{\lambda_j}$ para $j \in \{1, \ldots, p\}$, entonces $W_j := \mathrm{Vect}_k(\mathscr{B}_j) \subseteq W \cap V_{\lambda_j}$ y $W = \bigoplus_{j=1}^p W_j$ pues $W_j \subseteq V_{\lambda_j}$ y los V_{λ_j} están en suma directa. Sea $W'_j \subseteq V_{\lambda_j}$ un suplementario de W_j en V_{λ_j}, i.e., $V_{\lambda_j} = W_j \oplus W'_j$. Entonces, $u(W'_j) \subseteq W'_j$ pues W'_j está formado por vectores propios asociados a λ_j. Luego, si consideramos $W' := \mathrm{Vect}_k(W'_1, \ldots, W'_p)$ entonces tenemos que $W' = \bigoplus_{j=1}^p W'_j$ pues $W'_j \subseteq V_{\lambda_j}$ y los V_{λ_j} están en suma directa. Además, $u(W') \subseteq W'$ pues cada W'_j es estable por u. Finalmente, $V = W \oplus W'$ por construcción de W' y gracias a que u es diagonalizable.

Problema 3 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar endomorfismos complejos de orden finito.

Durante este problema, $k = \mathbb{C}$ y V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo y $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Decimos que u tiene **orden** m si $u^m = \mathrm{Id}_V$.

(a) Probar que todo valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ de u es una raíz m-ésima de la unidad (i.e., $\lambda^m = 1$). Deducir a partir de lo anterior que $\det(u) \in \mathbb{C}$ es una raíz m-ésima de la unidad y que $u \in \mathrm{GL}(V)$.

(b) ¿Es $\mathrm{tr}(u) \in \mathbb{C}$ necesariamente una raíz m-ésima de la únidad? Dar una demostración en caso positivo o un contra-ejemplo sencillo en caso negativo.

(c) Demostrar que todo endomorfismo complejo de orden m es diagonalizable.

(d) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable[2] real tal que $A^3 = \mathrm{I}_n$. Probar que $A = \mathrm{I}_n$. ¿Es necesariamente la identidad la única matriz diagonalizable compleja $A \in M_n(\mathbb{C})$ que verifica $A^3 = \mathrm{I}_n$? Dar una demostración en caso positivo o un contra-ejemplo sencillo en caso negativo.

Solución:

(a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de u y sea $v \in V \smallsetminus \{0\}$ un vector propio asociado a λ, i.e., $u(v) = \lambda v$. Luego $v = u^m(v) = \lambda^m v$, y dado que $v \neq 0$, tenemos que $\lambda^m = 1$. Si denotamos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios (no necesariamente distintos) de u, entonces $\det(u) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ y luego $\det(u)^m = \lambda_1^m \cdots \lambda_n^m = 1$, i.e., $\det(u)$ es una raíz m-ésima de la unidad. En particular, $\det(u) \neq 0$ y luego $u \in \mathrm{GL}(V)$.

(b) Supongamos que $V = \mathbb{C}^2$ y sea u el endomorfismo cuya matriz respecto a la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $u^2 = 1$, por lo que u es un automorfismo de orden 2. Sin embargo, $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A) = 0$ **no** es una raíz cuadrada de la unidad.

[2]Notar que si no imponemos la condición de ser diagonalizable la conclusión es falsa: considerar por ejemplo A_θ, la matríz real 2×2 dada por la rotación en un ángulo de $\theta = \frac{2\pi}{3}$, que verifica $A_\theta^3 = \mathrm{I}_2$.

(c) Sea $P(X) = X^m - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Entonces $P(u) = 0$ pues u tiene orden m, por lo que el polinomio minimal $m_u(X)$ divide a $P(X)$. Por otra parte, P escinde como producto de raíces simples sobre $\mathbb{C}$: $P(X) = (X-1)(X-\xi)\cdots(X-\xi^{m-1})$, donde $\xi = e^{2\pi i/m}$. Luego, necesariamente $m_u(X)$ tiene raíces simples, lo cual implica que u es diagonalizable.

(d) Sea $P(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) \in \mathbb{R}[X]$. Entonces $P(A) = 0$ pues A tiene orden 3, por lo que el polinomio minimal $m_A(X)$ divide a $P(X)$. Dado que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, necesariamente $m_A(X)$ escinde sobre $\mathbb{R}$ con raíces simples. Dado que $Q(X) = X^2+X+1$ no escinde sobre $\mathbb{R}$ tenemos que necesariamente $m_A(X) = X - 1$ y luego $A = \mathrm{I}_3$ es la matriz identidad. En el caso $k = \mathbb{C}$ el resultado anterior es falso: sea $\omega = e^{2\pi i/3}$ raíz cúbica de la unidad, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$ es diagonalizable de orden 3 y $A \neq \mathrm{I}_3$.

Problema 4 (33 puntos)

El objetivo de este problema es analizar cierto tipo especial de endomorfismos que son de mucha utilidad en Análisis Numérico y en Geometría.

Sea k un cuerpo de característica $\neq 2$ (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{F}_p$ con $p \geq 3$). Sea $u : V \to V$ un endomorfismo tal que $u^2 = u$.

(a) Demostrar que u es diagonalizable y calcular sus posibles valores propios.

(b) Deducir del punto anterior que $V = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

(c) Sea $v := \mathrm{Id}_V - u \in \mathrm{End}_k(V)$. Probar que $v^2 = v$, y que se tienen las igualdades $\ker(v) = \mathrm{Im}(u)$ y $\mathrm{Im}(v) = \ker(u)$.

(d) Sea $s : V \to V$ un endomorfismo que verifica $s^2 = \mathrm{Id}_V$. Consideremos

$$u_s := \frac{\mathrm{Id}_V + s}{2} \quad \text{y} \quad v_s := \frac{\mathrm{Id}_V - s}{2}.$$

Si definimos $V_+ := \mathrm{Im}(u_s)$ y $V_- := \mathrm{Im}(v_s)$, probar que $V = V_+ \oplus V_-$ y que para todo $x \in V_+$ (resp. $x \in V_-$) se tiene que $s(x) = x$ (resp. $s(x) = -x$).

Solución:

(a) Sea $P(X) = X^2 - X = X(X-1) \in k[X]$. Entonces $P(u) = 0$ por hipótesis, y luego el polinomio minimal $m_u(X) \in k[X]$ divide a $P(X)$. En particular, $m_u(X)$ escinde y solo tiene raíces simples, por lo que u es diagonalizable. Además, las posibles raíces de m_u (i.e., valores propios de u) son 0 y 1.

(b) Dado que u es diagonalizable, $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}$ es la suma directa de espacios propios de u. Si $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = 1$) es el único valor propio de u, entonces $u = 0$ (resp. $u = \mathrm{Id}_V$) de donde se deduce que $V = \ker(u)$ (resp. $V = \mathrm{Im}(u)$). Si u posee dos valores propios diferentes entonces ellos son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, en cuyo caso $V = V_0 \oplus V_1$, donde por definición tenemos que $V_0 = \ker(u)$. Notemos que $V_1 \subseteq \mathrm{Im}(u)$ pues $x_1 \in V_1$ implica que $x_1 = u(x_1) \in \mathrm{Im}(u)$. Finalmente, sea $x \in \mathrm{Im}(u)$ y veamos que $x \in V_1$: si escribimos $x = u(y)$ para cierto $y \in V$ entonces $u(x) = u^2(y) = u(y) = x$ y luego $x \in V_1$.

(c) Calculamos $v^2 = (\mathrm{Id}_V - u)^2 = \mathrm{Id}_V^2 - 2u + u^2 = \mathrm{Id}_V - u = v$. Finalmente, $x \in \ker(v)$ si y sólo si $(\mathrm{Id}_V - u)(x) = x - u(x) = 0$, i.e., $x \in \mathrm{Im}(u)$ gracias al punto (b). La igualdad $\ker(u) = \mathrm{Im}(v)$ se deduce del mismo modo notando que $u = \mathrm{Id}_V - v$.

(d) Calculamos $u_s^2 = \frac{\mathrm{Id}_V^2 + 2s + s^2}{4} = \frac{2\,\mathrm{Id}_V + 2s}{4} = \frac{\mathrm{Id}_V + s}{2} = u_s$ y que $\mathrm{Id}_V - u_s = \mathrm{Id}_V - \frac{(\mathrm{Id}_V + s)}{2} = \frac{\mathrm{Id}_V - s}{2} = v_s$. Luego, los puntos (b) y (c) implican que $V = \ker(u_s) \oplus V_+$ y que $\ker(u_s) = V_-$, de donde se concluye $V = V_+ \oplus V_-$. Si $x \in V_+$ (resp. $x \in V_-$) entonces $x = u_s(y) = \frac{y + s(y)}{2}$ (resp. $x = v_s(y) = \frac{y - s(y)}{2}$) para cierto $y \in V$, por lo que $s(x) = \frac{s(y) + s^2(y)}{2} = \frac{s(y) + y}{2} = x$ (resp. $s(x) = \frac{s(y) - s^2(y)}{2} = \frac{s(y) - y}{2} = -x$).

Comentario: Un endomorfismo $p : V \to V$ que verifica $p^2 = p$ es llamado un **operador de proyección**, y un endomorfismo $s : V \to V$ que verifica $s^2 = \mathrm{Id}_V$ es llamado una **simetría**. El problema anterior implica que a toda simetría podemos asociarle operadores de proyección p_+ y p_-. Además, si $s \neq \pm\mathrm{Id}_V$ entonces V_+ y V_- son no-nulos y s es la simetría (geométrica) respecto al sub-espacio V_+.

Problema 5 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar completamente cierto endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ y analizar el sistema dinámico discreto asociado.

Sea $\mathscr{V}$ el conjunto de sucesiones $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathbb{R}^3$, es decir, cada elemento $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$. Dotamos a $\mathscr{V}$ de una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial mediante:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathscr{V}, \qquad (\lambda\mathbf{U} + \mathbf{V})_n := \lambda\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n.$$

Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $V = \{\mathbf{U} = (\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{V}$ tal que $\mathbf{U}_{n+1} = A\mathbf{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Probar que V es un sub-espacio vectorial de $\mathscr{V}$ y construir un isomorfismo de espacios vectoriales $\varphi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$ (justificando porqué es sobreyectivo, y porqué es inyectivo).

(b) <u>Haciendo operaciones columna</u> (al menos dos operaciones), probar que $P_A(X) = \det(X\mathrm{I}_3 - A) = (X - a)(X - b)(X - c)$ para ciertos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ a determinar, donde $a < 0 < b < c$. Determinar un vector propio v_a (resp. v_b, resp. v_c) asociado al valor propio a (resp. b, resp. c).

(c) Determinar sucesiones no-nulas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ tales que $\mathbf{A}_{n+1} = a\mathbf{A}_n$ (resp. $\mathbf{B}_{n+1} = b\mathbf{B}_n$, resp. $\mathbf{C}_{n+1} = c\mathbf{C}_n$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar (e.g. usando el isomorfismo φ) que $\mathscr{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ es una base de V y dar una fórmula explícita para $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n \in \mathbb{R}^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Sea $\mathbf{U} \in V$ definida por $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinar las coordenadas de $\mathbf{U}$ respecto a la base $\mathscr{B}$ y (usando los puntos anteriores) determinar una fórmula explícita para $\mathbf{U}_n \in \mathbb{R}^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

(a) La sucesión nula $\mathbf{0} \in \mathscr{V}$ pertenece a V puesto que $0 = A0$ en $\mathbb{R}^3$. Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in V$ entonces la sucesión $\mathbf{W} := \lambda\mathbf{U} + \mathbf{V} \in V$ puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\mathbf{W}_{n+1} = \lambda\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{V}_{n+1} = \lambda A\mathbf{U}_n + A\mathbf{V}_n = A(\lambda\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n) = A\mathbf{W}_n.$$

Finalmente, la aplicación $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \mathbf{U}_0$ que asocia a cada sucesión su término inicial es una aplicación lineal, pues por definición $(\lambda\mathbf{U} + \mathbf{V})_0 = \lambda\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0$. Por un lado tenemos que φ es sobreyectiva pues $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^3$ puede ser escogido arbitrariamente y, a partir de esta condición inicial, definimos $\mathbf{U}_1 = A\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_2 = A\mathbf{U}_1$, etc. Por otro lado, tenemos que φ es inyectiva puesto que si $\mathbf{U}_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\mathbf{U}_1 = A0 = 0$, $\mathbf{U}_2 = A0 = 0$, etc. Así, φ induce un isomorfismo $V \cong \mathbb{R}^3$.

(b) Consideremos el polinomio característico $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -4 & 4 \\ -1 & X & -2 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$. Haciendo las operaciones columna $C_1 \mapsto C_1 - C_2$ y $C_3 \mapsto C_3 + C_2$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} X-3 & -4 & 4 \\ -1 & X & -2 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & -4 & 0 \\ -(X+1) & X & X-2 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & X & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Al desarrollar el último determinante usando la última columna (o, alternativamente, haciendo la operación columna $C_2 \mapsto C_2 + 4C_1 + C_3$ para obtener una matriz cuya tercera fila sólo tiene un término no nulo) obtenemos $(-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & X \end{vmatrix} = -1 + X - 4 = X - 3$. Finalmente, concluimos que $P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-3)$ y luego $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$. Dado que las raíces de P_A son simples, cada espacio propio V_a, V_b, V_c es de dimensión 1, i.e., está generado por un vector propio v_a, v_b y v_c, respectivamente.

Para $a = -1$ tenemos que

$$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyo kernel puede ser calculado directamente: sea $v_a = (x, y, z)$ tal que $4x + 4y - 4z = x + y + 2z = 0$. Si suponemos $x = 1$ obtenemos el sistema $y - z = -1$ y $y + 2z = -1$, el cual posee como solución $(y, z) = (-1, 0)$. Luego, $v_a = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ es un vector propio asociado al valor propio $a = -1$.

Para $b = 2$ tenemos que

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo kernel puede ser calculado directamente: sea $v_a = (x, y, z)$ tal que $x+4y-4z = x-2y+2z = x+y+z = 0$. Notar que si $x \neq 0$ obtenemos un sistema que no posee soluciones, por lo que $x = 0$ y luego $z = -y$. Luego,$v_b = (0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$ es un vector propio asociado al valor propio $b = 2$.

Si $c = 3$ tenemos que

$$A - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyo kernel puede ser calculado directamente: sea $v_a = (x, y, z)$ tal que $4y-4z = x-3y+2y = x+y-2 = 0$. Si suponemos $x = 1$ obtenemos $y = 2 - x = 1 = z$. Luego, $v_c = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ es un vector propio asociado al valor propio $c = 3$.

(c) Las condiciones $\mathbf{A}_1 = A\mathbf{A}_0 = a\mathbf{A}_0$ y $\mathbf{A}_0 \neq 0$ (para que $\mathbf{A}$ sea no-nula) aseguran que $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^3$ es un vector propio de A asociado al valor propio $a = -1$. Más aún, en tal caso tenemos que $\mathbf{A}_n = A^n\mathbf{A}_0 = a^n\mathbf{A}_0$ por lo que la condición $\mathbf{A}_{n+1} = a\mathbf{A}_n$ es satisfecha en tal caso. Luego, basta tomar $\mathbf{A}_0 = v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde deducimos que $\mathbf{A}_n = (-1)^n\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$. De manera completamente análoga, tomamos

$\mathbf{B}_0 = v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C}_0 = v_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de donde deducimos que $\mathbf{B}_n = 2^n \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C}_n = 3^n \mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$.
Finalmente, $\mathscr{B}' = (v_a, v_b, v_c)$ es una base de $\mathbb{R}^3$ pues que A es diagonalizable. Por otro lado, dado que $\varphi(\mathscr{B}) = \varphi((\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})) = (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) = \mathscr{B}'$ y φ es un isomorfismo, tenemos que $\mathscr{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ es una base de V.

(d) Al resolver el sistema $\mathbf{U}_0 = \alpha_1 \mathbf{A}_0 + \alpha_2 \mathbf{B}_0 + \alpha_3 \mathbf{C}_0$ obtenemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Por otra parte, como φ es un isomorfismo tenemos que $\mathbf{U} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ y luego para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n + \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n + 3^n \\ 2^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

Bonus (30 puntos)

(B1) Sea $u : V \to V$ un endomorfismo. Probar que u es diagonalizable si y sólo si existe un polinomio que escinde sobre k con raíces simples que anula a u.
Solución: Si u es diagonalizable entonces $m_u \in k[X]$ escinde sobre k con raíces simples y, por definición de m_u, tenemos $m_u(X) = 0$. Por otro lado, si $P \in k[X]$ escinde con raíces simples y verifica $P(u) = 0$, entonces m_u divide a P. En particular, m_u escinde sobre k y tiene sólo raíces simples, por lo que u es necesariamente diagonalizable.

(B2) Sea $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible compleja y sea $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Demostrar que si A^m es diagonalizable entonces A es diagonalizable.[3]
Solución: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ los valores propios (no necesariamente distintos) de A. Entonces $\lambda_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ pues $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Además, $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ son los valores propios de A^m. Sea $P(X) = (X - \lambda_1^m) \cdots (X - \lambda_n^m)$ polinomio característico de A^m. Sabemos por Cayley-Hamilton que $P(A^m) = (A^m - \lambda_1^m) \cdots (A^m - \lambda_n^m) = 0$. Luego, si definimos $Q(X) = (X^m - \lambda_1^m) \cdots (X^m - \lambda_n^m)$, entonces $Q(A) = 0$ y cada factor $(X^m - \lambda_j^m)$ escinde sobre $\mathbb{C}$ como producto $(X - \lambda_j)(X - \xi\lambda_j) \cdots (X - \xi^{m-1}\lambda_j)$, donde $\xi = e^{2\pi i/m}$ raíz m-ésima de la unidad. Dado que cada $\lambda_j \neq 0$, $Q(X)$ es un polinomio que escinde sobre $\mathbb{C}$ con raíces simples que anula a A, por lo que A es diagonalizable.

(B3) Sea p un número primo. Utilizar convenientemente el pequeño teorema de Fermat para probar que una matriz $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ es diagonalizable si y sólo si $A^p = A$.
Solución: Si $A = PDP^{-1}$ para cierta $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ y D matriz diagonal con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}_p$ (no necesariamente distintos), entonces $A^p = PD^pP^{-1}$ donde D^p es diagonal con términos diagonales $\lambda_1^p = \lambda_1, \ldots, \lambda_n^p = \lambda_n$ gracias al pequeño teorema de Fermat, i.e., $D^p = D$ y luego $A^p = A$. Por otra parte, si $A^p = A$ entonces el polinomio minimal $m_A \in \mathbb{F}_p[X]$ divide al polinomio $P(X) = X^p - X$ el cual sólo tiene raíces simples pues $P(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{F}_p$ (pequeño teorema de Fermat), y luego P tiene exactamente p raíces simples distintas. Así, m_A escinde sobre $\mathbb{F}_p$ con raíces simples, por lo que A es diagonalizable.

(B4) Bajo las mismas hipótesis y con la misma notación del Problema 1.(b), supongamos que $\alpha \neq 0$ y que $\lambda \neq 0$. Demostrar que si $|\mu| < |\lambda|$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. Deducir (sin utilizar la fórmula explícita de F_n) que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$, donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el **número áureo**[4].
Solución: Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$, donde $\mu < \lambda$ valores propios reales. Luego, dado que tanto α como λ son no-nulos, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}}{\alpha\lambda^n + \beta\mu^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda + \frac{\beta}{\alpha}\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n}{1 + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n} = \lambda,$$

[3] La otra implicancia es cierta para cualquier matriz (invertible o no) sobre cualquier cuerpo: si $A \in M_n(k)$ es diagonalizable, entonces A^m también lo es para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

[4] Este último límite fue por primera vez calculado por el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630).

donde este último límite se obtiene gracias a que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = 0$ pues $|\frac{\mu}{\lambda}| < 1$. Para el caso de la sucesión de Fibonacci tenemos que $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: \varphi$. Notamos que $|\mu| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = |\lambda| - 1$, por lo que $|\mu| < |\lambda|$ y luego $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(B5) Un endomorfismo $u : V \to V$ es llamado **semi-simple** si todo sub-espacio estable $W \subseteq V$ (i.e., que verifica $u(W) \subseteq W$) admite un suplementario estable por u, i.e., existe $W' \subseteq V$ tal que $V = W \oplus W'$ y $u(W') \subseteq W'$. Sea $u : V \to V$ un endomorfismo semi-simple tal que su polinomio característico $P_u \in k[X]$ escinde sobre k. Probar que u es diagonalizable[5].
Indicación: Considerar un vector propio $v_1 \in V \smallsetminus \{0\}$ de u y H_1 un hiperplano estable suplementario a la recta generada por v_1. Probar que la restricción $u_{H_1} := u|_{H_1} : H_1 \to H_1$ posee al menos un vector propio. Construir inductivamente una base de V formada por vectores propios de u.
Solución: Dado que P_u escinde sobre k, existe $v_1 \in V \smallsetminus \{0\}$ vector propio de u. Sea $W_1 = \mathrm{Vect}_k(v_1)$ la recta generada por v_1. Dado que v_1 es un vector propio de u, tenemos que $u(W_1) \subseteq W_1$ y luego W_1 es estable por u. Como u es un endomorfismo semi-simple, tenemos que existe H_1 (hiperplano) suplementario de W_1 que es estable por u. Dado que $V = W_1 \bigoplus H_1$, y tanto W_1 como H_1 son estables por u, tenemos que $P_u(X) = P_{u_{W_1}}(X)P_{u_{H_1}}(X)$, donde $u_{W_1} : W_1 \to W_1$ y $u_{H_1} : H_1 \to H_1$ es la restricción de u a W_1 y H_1, respectivamente. En particular, dado que P_u escinde sobre k tenemos que $P_{u_{H_1}}$ escinde sobre k. Luego, u_{H_1} posee un vector propio $v_2 \in H_1$, que también es un vector propio de u. Sea $W_2 := \mathrm{Vect}_k(v_1, v_2)$ sub-espacio estable por u. Dado que u es semi-simple, existe $H_2 \subseteq V$ sub-espacio estable por u tal que $V = W_2 \oplus H_2$. Continuando con este proceso obtenemos para $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ sub-espacios $W_m = \mathrm{Vect}_k(v_1, \ldots, v_m)$ y H_m estables por u tales que $V = W_m \oplus H_m$ y donde $v_1, v_2, \ldots$ son vectores propios de u. Dado que $v_{m+1} \notin W_m$ tenemos que $\dim_k(W_m) = m$ y luego este proceso termina con $W_n = V$ y $H_n = 0$, donde $n = \dim_k(V)$. Luego, $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V formada por vectores propios de u.

(B6) Supongamos $k = \mathbb{F}_p$ y sea $u : V \to V$ un endomorfismo. Probar que existe un entero positivo $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que el endomorfismo $v := u^{m_0}$ verifica $v^2 = v$.
Indicación: Probar que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(V)$ *es un conjunto finito y luego el conjunto* $\{u^m,\ m \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$ *es finito.*
Solución: Notar que un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{F}_p^n$ y luego $\mathrm{card}(V) = p^n$. En particular, $\mathrm{card}(\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(V)) = p^{n^2}$, y $E := \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(V)$ es un conjunto finito. Luego, el conjunto de endomorfismos $\{u^m,\ m \in \mathbb{N}^{\geq 1}\} = \{u, u^2, u^3, \ldots\} \subseteq E$ es finito. En particular, la sucesión $\{u^m,\ m \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$ es periódica a partir de cierto valor $r \geq 1$, i.e., $\{u^m,\ m \in \mathbb{N}^{\geq 1}\} = \{u, u^2, \ldots, u^{r-1}, u^r, u^{r+1}, \ldots, u^N, u^{N+1} = u^r, u^{N+2} = u^{r+1}, \ldots\}$. Sea $\ell = N - r + 1 \geq 1$ el periodo de los últimos términos de la sucesión, i.e., para todo $m \geq r$ se tiene $u^m = u^{m+\ell} = u^{m+2\ell} = u^{m+3\ell}$, etc. Basta tomar $m_0 = k\ell$ para cierto $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ de tal suerte que $k\ell \geq r$. Así, $v := u^{m_0}$ verifica $v^2 = u^{2m_0} = u^{2k\ell} = u^{k\ell+k\ell} = u^{k\ell} = v$.
Comentario: El resultado anterior implica que todo endomorfismo u de un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}_p$ admite una potencia u^{m_0} diagonalizable.

[5] Este resultado junto con el Problema 2.(d) implican, en particular, que si k es algebraicamente cerrado (e.g. $k = \mathbb{C}$) entonces un endomorfismo es semi-simple si y sólo si es diagonalizable.