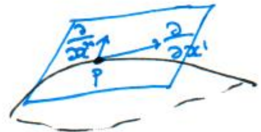
Geometría Riemanniana (Semana 9): "Geodésicas y Campos de Killing"

Recuerdo: Sea (M,g) variedad Riemanniana y $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ una conexión.

Si $X,Y\in\mathfrak{X}(M) \underset{dy}{=} \Gamma(TM)$ campos vectoriales, entonces $\nabla_X Y\in\Gamma(TM)$.

Notación: Si $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ base de T_pM



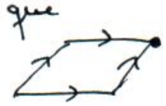
$$\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \underset{dy}{=} \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

símbolos de Christoffel

En general, si $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial y^j}$ entonces

$$\nabla_X Y = \underbrace{X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^k\,\Gamma^j_{ik}\right)}_{=(\nabla_X Y)^k \text{ k-ésima comp. de } \nabla_X Y}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Hecho: $\exists!$ conexión ∇ en (M,g) tal que

① $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ (libre de torsión  ✓)

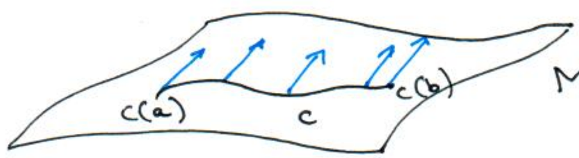
② Compatible con la métrica ( "preserva norma en transp. //").

⇝ ∇ es la conexión de Levi-Civita. Además:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

Convención: A menos que se indique lo contrario, ∇ será Levi-Civita!

Sea $c: I\to M$ una curva y $X(t)\in T_{c(t)}M$ un campo vectorial sobre c:

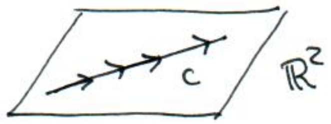


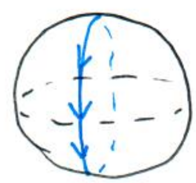
Decimos que X es transportado paralelamente a lo largo de c si $\nabla_{\dot c}X = 0$, i.e., si $c(t) \underset{loc}{=} (x_1(t),\dots,x_n(t))$ y $X(t) \underset{loc}{=} V^j(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$

entonces $\nabla_{\dot c}X = 0 \iff$ Sistema de EDO

$$\frac{dV^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\cdot\frac{dx_i}{dt}\cdot V^j = 0 \qquad (k=1,\dots,n)$$

Intuitivamente, una geodésica es una curva con velocidad $\dot{c}$ paralela a sí misma





<u>Def</u>: Una curva $c : I = [a,b] \longrightarrow M$ es una <u>geodésica</u> si $\nabla_{\dot{c}}\, \dot{c} = 0$, ie, $c(t) \underset{loc}{=} (x_1(t), \dots, x_n(t))$ verifica la ecuación geodésica

$$(G) \qquad \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \, \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n).$$

cuya solución es única si $c(0)$ y $\dot{c}(0)$ son dados.

<u>Eg</u>. $(\mathbb{R}^n, g_{eucl})$ tiene $\Gamma^k_{ij} = 0$ y luego (G) : $\dfrac{d^2 x_k}{dt^2} = 0$

$\iff x_k(t) = a_k t + b_k \rightsquigarrow c$ es una recta !

<u>Importante</u>: Si $c : [a,b] \longrightarrow M$ es una curva, definimos su <u>largo</u> por

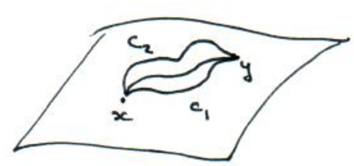
$$L(c) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}\, dt =: \int_a^b |\dot{c}|\, dt$$

(eg. $(\mathbb{R}^n, g_{eucl}) \Rightarrow L(c) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\, dt$)

<u>Obs</u>: Siempre podemos hallar una reparametrización "por longitud de arco" $c(s) = c(t(s))$ tal que $|\dot{c}(s)| = 1$ y luego $L(c) = \int_{a'}^{b'} ds$

Si $x, y \in M$ es natural definir

$$d(x,y) := \inf_{\substack{c : [a,b] \to M \\ c(a) = x,\ c(b) = y}} L(c)$$



<u>Hecho</u>: (M, d) es un espacio métrico y la topología inducida coincide con la topología original de M.

En vista de lo anterior, podemos definir una <u>geodésica entre x e y</u> como una curva $c : [a,b] \longrightarrow M$ tal que $c(a) = x$, $c(b) = y$, y que $d(x,y) = L(c)$.

La relación entre ambas definiciones se obtiene gracias a la <u>Ecuación de Euler-Lagrange</u>:

Sea $E(c) := \frac{1}{2} \int_c |\dot{c}|^2\, ds = \frac{1}{2} \int_c g_{ij}\, x_i' x_j'\, ds = \int_c \mathcal{L}(s, x, x')\, ds$

entonces, si c es una geodesica (punto crítico)

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i=1,\dots,n) \qquad \text{(EL)}$$

$$\text{ie, } \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\cdot \underset{\uparrow}{2} g_{ij} x_j'\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} x_i' x_j' = 0$$

derivada de forma cuadrática

Regla de la cadena (Ejercicio): $\text{(EL)} \Leftrightarrow g_{ij}\dfrac{d^2 x_j}{ds^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}\right)\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds} = 0$

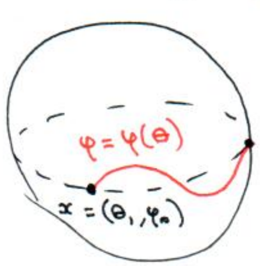
Mult. por g^{ij} : $\text{(EL)} \Longleftrightarrow \text{(G)}$ Ec. geodesica ✓

<u>Ejemplo</u>: En la esfera $f: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\theta,\varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

con $g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \underbrace{\delta_{ij}}_{= g_{eucl}} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial f^j}{\partial x^l}\, dx^k \otimes dx^l = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi$

tenemos $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2)$ y luego (EL) se reduce a:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta\cos\theta \left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \\[2mm] \dfrac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\cot\theta\, \dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{d\theta}{ds} = 0 \end{cases} \qquad \left(\Rightarrow \begin{array}{l} \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta \end{array}\right)$$



$$L(c) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2(\theta)\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

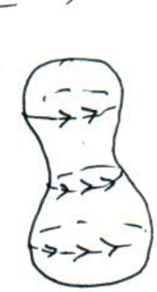
se minimiza cuando $\dfrac{d\varphi}{d\theta} \equiv 0$, ie, $\varphi \equiv \varphi_0$

$\Rightarrow$ geodesicas son los "círculos grandes"

<u>Campos de Killing</u> (Wilhelm Killing 1847 – 1923)

Sea $X \in \Gamma(TM)$ y $\{\varphi_t : M \longrightarrow M\}_{t\in\mathbb{R}}$ su flujo asociado. Decimos que X es un <u>campo de Killing</u> si $\varphi_t^* g = g$ (ie, es un "<u>flujo de isometrías</u>")

<u>Obs</u>: En tal caso, $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ verifica:



$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* g) \underset{\text{dy}}{=} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi_{t+\varepsilon}^* g = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi_t^* \varphi_\varepsilon^* g$$

$$= \varphi_t^*\left(\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi_\varepsilon^* g\right) \underset{\text{dy}}{=} \varphi_t^*(\mathcal{L}_X g)$$

Así, $\varphi_t^* g = g \Leftrightarrow \varphi_t^*(\mathcal{L}_X g) = 0\ \forall t \underset{t=0}{\Longleftrightarrow} \boxed{\mathcal{L}_X g = 0}$

Equivalentemente (ver Biquard),

$$\mathcal{L}_X g = 0 \underset{\text{dy}}{\iff} \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0 \quad \forall Y, Z \in \Gamma(TM)$$

"Ecuación de Killing"

Obs prácticas:

① Si $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ coord. locales de T_pM y $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

entonces la Ec. de Killing es: $\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X \right\rangle = 0 \quad \forall i,j$

② La identidad de Jacobi implica que si X, Y son campos de Killing entonces $[X,Y]$ también! ⇝ $\mathfrak{a} := \{X \in \Gamma(TM) : X \text{ Killing}\}$ álgebra de Lie

Ejemplo: $(M,g) = (\mathbb{R}^2, g_{eucl})$ y sea $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$

La Ec. de Killing es (usando $\Gamma_{ij}^k = 0$):

$$\left\langle P_x \frac{\partial}{\partial x} + Q_x \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, P_x \frac{\partial}{\partial x} + Q_x \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 2P_x = 0$$

$$\left\langle P_x \frac{\partial}{\partial x} + Q_x \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, P_y \frac{\partial}{\partial x} + Q_y \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = Q_x + P_y = 0$$

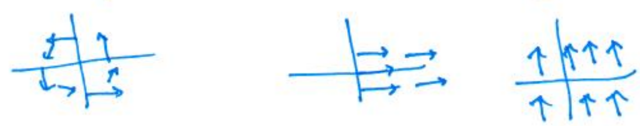
$$\left\langle P_y \frac{\partial}{\partial x} + Q_y \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, P_y \frac{\partial}{\partial x} + Q_y \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 2Q_y = 0$$

Así, $P(x,y) = P(y)$ y $Q(x,y) = Q(x)$ cumplen $Q_x = -P_y$

$\iff Q'(x) = -P'(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \iff Q'(x) = \exists\lambda = -P'(y)$

$$\iff \begin{cases} P(x,y) = -\lambda y + a \\ Q(x,y) = \lambda x + b \end{cases} \iff X = \lambda \underbrace{(-y,x)}_{X_1} + a \underbrace{(1,0)}_{X_2} + b \underbrace{(0,1)}_{X_3}$$

$\Rightarrow \mathfrak{a} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle_{Lie}$



Obs: Si $(M,g) = \left(\mathbb{R}^4, g_{Mink} = \sum_{i=1}^{3} dx^i \otimes dx^i - dt \otimes dt\right)$

entonces $\mathfrak{a}$ coincide con las Transformaciones de Lorentz!

Ver Nakahara "Geometry, Topology and Physics" §7.7 para más detalles.