Previos

Definición 1: Una aplicación diferenciable $c: I \longrightarrow M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en una variedad diferenciable M se denomina curva.

Definición 2: Un "campo vectorial V a lo largo de una curva $c: I \longrightarrow M$" es una aplicación que a cada $t \in I$ asocia un vector tangente $V(t) \in T_{c(t)} M$.

Diremos que V es diferenciable si para toda función diferenciable f en M, la función $t \longrightarrow V(t) f$ es una función diferenciable en I.

El campo vectorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$ $(c'(t))$ es llamado campo velocidad (tangente) de C.

Paralelismo

Def: Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Un campo vectorial V a lo largo de la curva $c: I \longrightarrow M$ es llamado paralelo cuando

$$\frac{DV}{dt} = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Prop: Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Sea $c: I \longrightarrow M$ una curva diferenciable en M y V_0 un vector tangente a M en $c(t_0)$, $t_0 \in I$.
(i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)} M$)

Entonces existe un único campo de vectores paralelo V a lo largo de c, tal que $V(t_0) = V_0$

$V(t)$ es llamado transporte Paralelo de $V(t_0)$ a lo largo de c.

Podemos suponer que $C(I)$ está contenido en $X(U)$ de un sistema de coordenadas $X: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ en torno de $C(I)$.

Sea $X^{-1}(C(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ la expresión local de $C(t)$ y sea $V_0 = \sum_j V_0^j X_j$

donde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(C(t_0))$

Supongamos que existe un V en $X(U)$ que es paralelo a lo largo de c con $V(t_0) = V_0$.

Entonces

$$V(t) = \sum_j v^j(t) X_j(c(t))$$

Por lo cual

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j$$

Haciendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$

obtenemos, cambiando j por k

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left[\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right] X_k = 0$$

(2)

El sistema de n- ecuaciones diferenciales en $V^k(t)$

$$0 = \frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k V^j \frac{dx_i}{dt} \qquad k = 1, \ldots, n$$

posee una única solución satisfaciendo la condición inicial. $V^k(t_0) = V_0^k$

Sigue que, si V existe, es único.

Además como la ecuación es lineal, la solución está definida para todo $t \in I$, lo que muestra la existencia de un único V con las propiedades deseadas.

Sea M variedad Riemanniana.

Considere la aplicación

$$P = P_{c,t_0,t} : T_{c(t_0)} M \longrightarrow T_{c(t)} M$$

definido por $P_{c,t_0,t}(V)$ $V \in T_{c(t_0)} M$ el transporte paralelo del vector V a lo largo de la curva c.

P es isometría si M es orientada

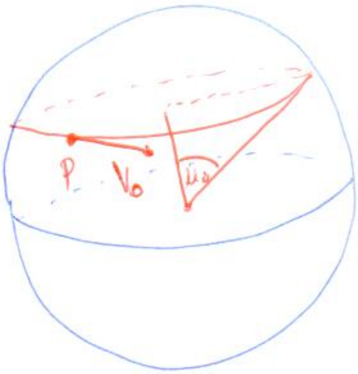
Sean X e Y campos de vectores en una V. Riem. M.
Sea $p \in M$ y $c : I \longrightarrow M$ una curva integral de X
por p $\left(c(t_0) = p \quad y \quad \frac{dc}{dt} = X(c(t)) \right.$

~~Muestre que~~ la conexión Riemanniana de M está dada

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt} \left(P^{-1}_{c,t_0,t} \left(Y(c(t)) \right) \right) \Big|_{t=t_0}$$

La conexión puede ser reobtenida de la noción de Paralelismo.

Ejemplo:



$u(0) = u_0 \qquad u_0 \neq 0, \pi.$

Calculamos el transporte paralelo del vector $V_0 = X_v$.
comenzando en P dado $u(0) = u_0 \quad v(0) = 0$.

Parametrizamos la curva por $u(t) = u_0 \quad v(t) = t$
$0 \leq t \leq 2\pi$

Consideremos la parametrización de S^2 por coordenadas esféricos

$$X(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u) \qquad \begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ 0 \leq v < 2\pi \end{array}$$

Los símbolos des Christoffel están dados por.

$$X_{uu} = \Gamma_{uu}^{u} X_u + \Gamma_{uu}^{v} X_v + l_1 n$$

$$X_{uv} = \Gamma_{uv}^{u} X_u + \Gamma_{uv}^{v} X_v + l_2 n$$

$$X_{vv} = \Gamma_{vv}^{u} X_u + \Gamma_{vv}^{v} X_v + l_3 n$$

y $X_u = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u)$

$X_v = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v, 0)$

$X_{uu} = (-\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos u) = -X(u,v)$

$X_{uu} = K n \quad (1)$

$X_{uv} = (-\cos u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, 0)$

$X_{vv} = (-\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, 0) = -\operatorname{sen} u (\cos v, \operatorname{sen} v, 0)$

◦) de (1) $\Rightarrow \Gamma_{uu}^{u} = \Gamma_{uu}^{v} = 0$

◦) $X_{uv} = \operatorname{cotg} u \, X_v \Rightarrow \Gamma_{uv}^{u} = 0 \qquad \Gamma_{uv}^{v} = \operatorname{cotg}(u)$

◦) $X_{vv} = -\operatorname{sen} u \cos u \, X_u - \operatorname{sen}^2 u \, \eta \Rightarrow \Gamma_{vv}^{v} = 0 \qquad \Gamma_{vv}^{u} = -\operatorname{sen} u \cos u$

Si ponemos $c(t) = X(u(t), v(t)) = X(u_0, t)$

$\Rightarrow$ El transporte Paralelo queda ~~determinado~~ expresado por.

$$V(t) = V^1(t)\, X_u(u(t), v(t)) + V^2(t)\, X_v(u(t), v(t))$$

$$V(t) = V^1(t)\, X_u(u_0, t) + V^2(t)\, X_v(u_0, t)$$

donde $V^1(t)$ y $V^2(t)$ son soluciones del Sistema

$$\frac{dV^1}{dt} = \operatorname{sen}(u_0)\cos(u_0)\, V^2(t)$$

$$\frac{dV^2}{dt} = -\operatorname{cotg}(u_0)\, V^1(t)$$

con condición inicial $\left.\begin{array}{l} V^1(0) = 0 \\ V^2(0) = 1 \end{array}\right\}$ $V_0 = X_v = 0 \cdot X_u + 1 \cdot X_v$

donde obtenemos

$$V^1(t) = (\operatorname{sen}(u_0)) \cdot \operatorname{sen}((\cos(u_0))\, t)$$

$$V^2(t) = \cos((\cos u_0)\, t)$$

4

Notar que

$$\| V(t) \|^2 = (V^1(t))^2 E + 2F V^1(t) V^2(t) + G (V^2(t))^2$$

$$= \operatorname{Sen}^2(u_0) \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ V_0 gira a medida que lo ~~traslada mos~~ transportamos paralelamente alrededor del circulo y su longitud se conserva.

Conexión Riemanniana.

Def: Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇ y una métrica Riemanniana $\langle , \rangle$.

Diremos que ∇ es compatible con la métrica, cuando para toda curva diferenciable c y cualquier par de campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de c, se tiene $\langle P, P' \rangle = cte.$

Prop: Sea M una variedad Riemanniana.
Una conexión ∇ en M es compatible con la métrica ssi:
Para todo par de campos de vectores V y W a lo largo de la curva diferenciable $c: I \longrightarrow M$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

Corolario: Una conexión ∇ en una variedad Riemanniana es compatible con la métrica ssi:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Def: Una conexión ∇ en una variedad diferenciable M es llamada simétrica si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (= XY - YX)$$

obs. En un sistema de coordenadas (U, x) el hecho de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, \ldots, n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$$

Teorema (Levi-civita)

Dada una variedad Riemanniana M, existe una única conexión ∇ en M t.q.:

a) ∇ es simétrica (libre de torsión)

b) ∇ es compatible con la métrica.

Suponemos la existencia de una ∇ satisfaciendo a) y b)

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \Big\{ X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle + \\ - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle \Big\}$$

(Fórmula de Koszul)

Obs:

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

Sigue de la Formula de Koszul

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

donde (g^{km}) son los elementos de la matriz inversa de (g_{km}).