LUN MAR MIE JUE ✕ VIE SAB DOM

06 05 22

Seminario de Geometría Riemanniana

7mo encuentro: MÉTRICAS Y CONEXIONES

1

§1. Definiciones y Ejemplos

En $\mathbb{R}^n$ para hacer geometría necesitamos un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (para medir ángulos, distancias, áreas, etc). Recordemos que:

Un producto interno en un EV es una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ que cumple:

(i) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ (simetría)

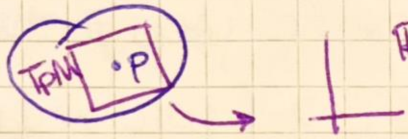
(ii) $\langle au+w,v\rangle = a\langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle$ (bilinealidad)

(iii) $\langle u,u\rangle \geq 0$ y vale la igualdad $\Leftrightarrow u=0$ (definida positiva)

Def: Sea M una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana en M es la elección para cada $p\in M$ de un producto interno $g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle_p$ en T_pM que dependa suavemente de p.

Decimos que (M, g) es una variedad Riemanniana.

<u>HECHO</u>: Toda variedad M admite una métrica Riemanniana

Se prueba: 

$\mathbb{R}^n$ (que tiene un prod. int)

+ Particiones de la unidad.

<u>En coordenadas:</u>

Dado un sistema coordenado $(x^1, \dots, x^n)$ en M alrededor de $p \in M$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\}$ forma base de T_pM y entonces, una métrica g en M queda determinada por:

$$\left(g_{ij}(p)\right) = \left(g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)\right)$$

$\downarrow$

funciones suaves

$(g_{ij}(p))$ es una matriz simétrica y def. positiva

<u>Notación</u>: $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = g_{ij}\, dx^i dx^j$

Dado otro sistema coord. (y^i) resulta:

$$g = \tilde{g}_{kl}\, dy^k\, dy^l$$

con $\tilde{g}_{kl} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l} \right\rangle$

En términos de las coord (x^i) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_l} = b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{con} \begin{cases} a_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} \\ b_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial y_l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{kl} = a_i b_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} g_{ij}$$

Por lo tanto: $\boxed{g = g_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y^k} \frac{\partial x_j}{\partial y^l} dy^k\, dy^l}$ (*)

Ejemplos:

1) $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual: $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canónica

$$\Rightarrow g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad g = (dx^i)^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM

4

② $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1+(n-1)}$ con la pseudo-métrica Lorentziana:

$$g = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - \cdots - (dx^n)^2$$

$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

No es una métrica porque no es def. positiva:

$g(e_i, e_i) = -1 \quad \forall i \geq 2.$

Decimos que g es una pseudo-métrica porque satisface: bilinealidad y simetría.

③ $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual en coord. polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Usando ⊛ y el ejemplo ① tenemos:

$$g = dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

④ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = (0, +\infty) \times S^{n-1}$ con la métrica plana:

$$g = dr^2 + r^2\, g_{S^{n-1}}$$

<u>Def</u>: Dada una inmersión suave $F: M \to \tilde{M}$ con $(\tilde{M}, \tilde{g})$ una variedad Riem., la métrica inducida por F es:

$$g = F^* \tilde{g}$$ → es una métrica Riem. en M.

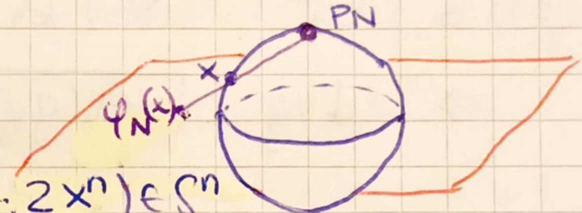
(5) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica inducida de $\mathbb{R}^{n+1}$:

Esta métrica recibe el nombre de métrica redonda.

$$S^n = \{ x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$$

Reescribimos las coordenadas de S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ usando la inversa de la proyección estereográfica:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{1-x_0}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \varphi_N : S^n - \{P_N\} \to \mathbb{R}^n$$



Si $r^2 = x^{1\,2} + \cdots + x^{n\,2} \Rightarrow$

$$\varphi_N^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = \frac{1}{r^2+1}(r^2-1, 2x^1, \ldots, 2x^n) \in S^n$$

De allí: $$g = d\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)^2 + d\left(\frac{2x^1}{r^2+1}\right)^2 + \cdots + d\left(\frac{2x^n}{r^2+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{4 \sum (dx^i)^2}{(1+r^2)^2}$$

§2. Forma de Volumen

Sea (M^n, g) una variedad Riem. orientada $\Rightarrow$ en cada $p \in M$ existe una n-forma positiva llamada la forma de volumen Riemanniana caracterizada por una de las siguientes propiedades (equivalentes):

(a) Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base de TM ortonormal localmente orientada entonces:

$$dV_g(E_1, \dots, E_n) = 1$$

(b) Si $(x^1, \dots, x^n)$ es cualq. coord. local orientada

$$\Rightarrow \quad dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Def: El volumen de M es: $V = \int_M dV_g$

OBS: * V puede ser ∞ si M no es compacto.

* Si M es una variedad compacta orientada $\Rightarrow dV_g$ no es exacta pues si lo fuera, por Stokes: $\int_M dV_g = 0$ (*)

§3. Isometrías

Def: Un difeomorfismo $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ es una isometría si $\varphi^* h = g$, es decir, Si $\forall v, w \in T_pM$, $\forall p \in M$

$$g_p(v,w) = h_{\varphi(p)}\left(d_p\varphi(v), d_p\varphi(w)\right)$$

$\Leftrightarrow$ $d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es una isometría de espacios métricos.

Ejemplo: El mapeo antipodal $x \mapsto -x$ en S^n es una isometría. En consecuencia, como $\mathbb{RP}^n$ (espacio proyectivo real) es el cociente de S^n por esta isometría, la métrica en S^n induce una métrica en $\mathbb{RP}^n$ (bien def.).

Ejercicio: El volumen de la esfera:

$$V(S^{2n}) = (4\pi)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$V(S^{2n+1}) = 2 \cdot \frac{\pi^{n+1}}{n!}$$

§4. Conexiones: Es una regla para calcular "derivadas direccionales" de campos vectoriales.

Sea $\pi: E \to M$ un fibrado vectorial suave sobre M y denotamos $\Gamma(E)$ el espacio de secciones de E.

Una conexión en E es un mapeo:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$ → derivada covariante de Y en la dirección X.

que satisface:

(i) $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$

↳ $C^\infty(M)$-lineal en X

(ii) $\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$

↳ $\mathbb{R}$-lineal en Y

(iii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$ → reglo del producto

<u>PROP</u>: $\nabla_X Y|_p$ depende sólo del valor de Y en un entorno de p y del valor de X en un entorno de p.

<u>PROP</u>: Si $\pi: TM \to M$ es el fibrado vectorial en M entonces $\nabla_X Y|_p$ depende del valor de Y en un

8

entorno de p y del valor de X en p.

En consecuencia, dado $v \in T_pM$ podemos definir $\nabla_v Y|_p$ como $\nabla_X Y|_p$ donde X es cualquier campo vectorial que cumple: $X(p) = v$.

OBS: Una conexión no es un tensor porque no es lineal sobre $C^\infty(M)$ en la coord Y, pero si ∇ y $\tilde{\nabla}$ son dos conexiones $\Rightarrow$ $\nabla - \tilde{\nabla}$ es un 2-tensor.

Def: Sea $\{E_i\}$ base de TM en un abierto $U \subseteq M$. Para cada ij podemos escribir $\nabla_{E_i} E_j$ en coord:

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

$\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ son los "coeficientes" de la conexión

HECHO: Una conexión está completamente determinada por los coeficientes Γ_{ij}^k en U:

Si $X = x^i E_i$ $\quad Y = Y^j E_j$, entonces:

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j E_j) = X(Y^j) E_j + Y^j \nabla_X E_j$$

$$= X(Y^j) E_j + x^i Y^j \nabla_{E_i} E_j$$

$$= X(Y^k) E_k + x^i Y^j \Gamma_{ij}^{\ \ k} E_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_X Y = \left(X(Y^k) + x^i Y^j \Gamma_{ij}^{\ \ k} \right) E_k}$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^n$: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$

$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{\ \ k} = 0 \quad \forall i,j,k.$

Def: Si el fibrado E tiene una métrica g decimos que la conexión ∇ en E es una conexión métrica (o compatible con la métrica) si:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$