Geometría Riemanniana (Semana 4):

Recuerdo: $X \in \Gamma(TM) \rightsquigarrow L_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivada de Lie resp. a X

$$f \longmapsto L_X f = df(X)$$

Cumple: $L_X(fg) = L_X(f)g + f L_X(g)$

Más general, una derivación es $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ tq se cumple $D(fg) = D(f)\cdot g + fD(g)$.

Teorema: $\Gamma(TM) \xrightarrow{\sim} D(C^\infty(M))$, $X \longmapsto L_X$

Obs: En coordenadas, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $X = (X^1, \dots, X^n) = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
$\Rightarrow d_{(y)} f(X(y)) = X^i(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$

Corchete de Lie: Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$. Se define $[X,Y]$ como el campo asociado a $[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$

Obs: En coord $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X = (X^1, \dots, X^n)$, $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$

$$[L_X, L_Y](f) = \left(X^j \frac{\partial Y_i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\underset{loc}{\Longrightarrow} [X,Y] = \left(X^j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

(Eg. $\underset{X^1}{\underline{f}} \frac{\partial}{\partial x} + \underset{X^2}{\underline{g}} \frac{\partial}{\partial y}$, $\underset{Y^1}{\underline{h}} \frac{\partial}{\partial x} + \underset{Y^2}{\underline{l}} \frac{\partial}{\partial y}$)

Propiedades:

1) $[X,Y] + [Y,X] = 0$
2) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$
3) $N \underset{subvar}{\subseteq} M$ y $X|_N, Y|_N \subseteq TN$
$\Rightarrow [X,Y]|_N = [X|_N, Y|_N]$
4) $\forall f \in C^\infty(M)$; $[X, fY] = f[X,Y] + L_X(f)Y$.

Obs: $[X,Y] = 0 \iff L_X L_Y = L_Y L_X$

Ecuaciones Dif. Ordinarias

$c: I \longrightarrow M^n$ curva suave. Si $t \in I$, entonces localmente

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$

Dado $X \in \Gamma(TM)$, ¿$\exists\, c$ tq $\dot{c}(t) = X(c(t))$?

Localmente: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X = (X^1, \dots, X^n)$

$c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\rightsquigarrow$ Queremos resolver:

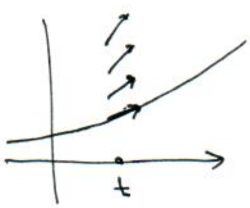
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = X^1(c(t)) \\ \dot{x}_2(t) = X^2(c(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = X^n(c(t)) \end{cases}$$

Ej) $M = \mathbb{R}^2$, $X = f \dfrac{\partial}{\partial x} + g \dfrac{\partial}{\partial y}$, $c(t) = (x(t), y(t))$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Recuerdo: $\dfrac{dx}{dt} = f(t)$ $\rightsquigarrow$ Fijar la cond. inicial: ¿$\exists\, x$ solución?

$\rightsquigarrow$ Fijar t y mover la condición inicial



"flujo"

Def: $X \in \Gamma(TM)$ se dice completo si al fijar cualquier condición inicial $c(0) = x \in M$, la solución $c_x(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema: $X \in \Gamma(TM)$ tiene soporte compacto $\Rightarrow X$ completo

Asumamos X completo:

Sea $c_x(t)$ solución a $x(c) = \dot{c}$ con condición inicial $x = c(0)$

$\rightsquigarrow$ Llamamos $\varphi_t(x) = c_x(t)$ el flujo de X en el tiempo t.

Lema: $t, t' \in \mathbb{R}$

$\varphi_t \circ \varphi_{t'} = \varphi_{t+t'}$ y $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = 1_M$

$\rightsquigarrow \varphi_t : M \longrightarrow M$ difeomorfismo local.

Ejemplo:

$M = \mathbb{R}^2$, (x_1, x_2), $X = f\dfrac{\partial}{\partial x_1} + g\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $f = x_1$, $g = x_2$

$(x_1, x_2) = \dot{c}(t) = X(c)$

$\rightsquigarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_1 \\ \dot{x}_2(t) = x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = \alpha_1 e^t \\ x_2(t) = \alpha_2 e^t \end{array}$, i.e., $\varphi_t(\alpha_1, \alpha_2) = e^t(\alpha_1, \alpha_2)$

§ Geometría de $[X,Y]$:

Def: $\phi : M \to N$ suave y $X \in \Gamma(TN)$. El pullback de X vía ϕ es $\phi^*(X)$. Localmente: $(\phi^*(X))_x = (d_x\phi)^{-1} X(\phi(x))$.

Sea $\varphi_t : M \to M$ un flujo, asociado a $X \in \Gamma(TM)$.

Si $Y \in \Gamma(TM)$, podemos considerar $\varphi_t^* Y \in \Gamma(TM)$

$\rightsquigarrow \left(\dfrac{d}{dt}\varphi_t^* Y\right)\Big|_{t=0} = [X,Y]$

Calculando: $\dfrac{d}{dt}\varphi_t^* Y = \varphi_t^*[X,Y]$

$\Rightarrow$ si $[X,Y] = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\varphi_t^* Y = 0$, i.e., $\varphi_t^* Y$ constante $\underset{\substack{t=0 \\ \text{es } 1_M}}{\Rightarrow} \varphi_t^* Y = Y$.

Calculando: ψ_u flujo de Y, $\dfrac{d}{du}(\varphi_t^{-1}\psi_u\varphi_t) = \varphi_t^* Y \Rightarrow \dfrac{d}{du}(\varphi_t^{-1}\psi_u\varphi_t) = Y$

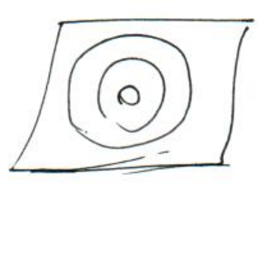
$\Rightarrow \varphi_t^{-1}\psi_u\varphi_t = \psi_u$, i.e., $\boxed{\psi_u \varphi_t = \varphi_t \psi_u}$

Teo: $[X,Y] = 0 \iff L_X L_Y = L_Y L_X \iff$ Los flujos de X e Y conmutan.

§ Teorema de Frobenius

Recuerdo: C curva se dice integral si es una curva paramétrica de una EDO

Eg. $-\dfrac{x}{y} = \dfrac{dx}{dy} \iff x^2 + y^2 = c$



Def: Una distribución p-dimensional en una variedad M es una asignación π tal que $\forall x \in M$ le asigna $D_{p,x} \subset T_x M$ subesp de dim p de manera suave.

Local: $x_1, \dots, x_n$ $\quad D_{p,x} = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$

$p=1$: $X \in \Gamma(TM)$ no se anule $\rightsquigarrow$ ¿ $\dot{X}(c) = \dot{c}$?

$p=2$: Localmente

$$X_1 = X_1^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad X_2 = X_2^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$\rightsquigarrow$ ¿$\exists$ superficie característica?

Def:

1) Una <u>hoja</u> de D es una inmersión $i : X^p \hookrightarrow M^n$ tal que $\forall x \in X$, $(d_x i)(T_x X) = D_{i(x),p}$

2) D se dice <u>integrable</u> si $\forall x \in M$, x está en una hoja de D.

3) D involutivo si $X, Y \in \Gamma(TM)$ en D se cumple que $[X,Y] \in D$

<u>Eg</u>. $f = (f_1, \dots, f_4)$, $g = (g_1, \dots, g_4)$
$\quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$* \begin{cases} L_f(u) = f_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_4 \frac{\partial u}{\partial x_4} \\ L_g(u) = \sum g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{cases}$$

Existen u_1, u_2 tq $\nabla u_1, \nabla u_2$ l.i. soluciones de $(*)$

<u>Teo</u> (Frobenius): $\exists\, u_1, u_2 \iff L_f L_g - L_g L_f = c_1 L_f + c_2 L_g$.

<u>Teo</u> (Frobenius): Una p-distribución en M involutiva es integrable (ie, $(3) \Rightarrow (2)$)

Mejor aún, es un si y solo si pues $(2) \Rightarrow (3)$:

$N \underset{\text{subvar}}{\subseteq} M$, $X, Y \in \Gamma(TM)$

$\rightsquigarrow [X|_N, Y|_N] = [X,Y]|_N$