April 1st 2022.

§ 1. Fibrado Tangente.

$M^n \subseteq \mathbb{R}^N$

$\rightarrow TM := \{(x, X) \mid x \in M,\ X \in T_x M\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, subvariedad.

$M \supseteq U$, abierto. $U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^N$

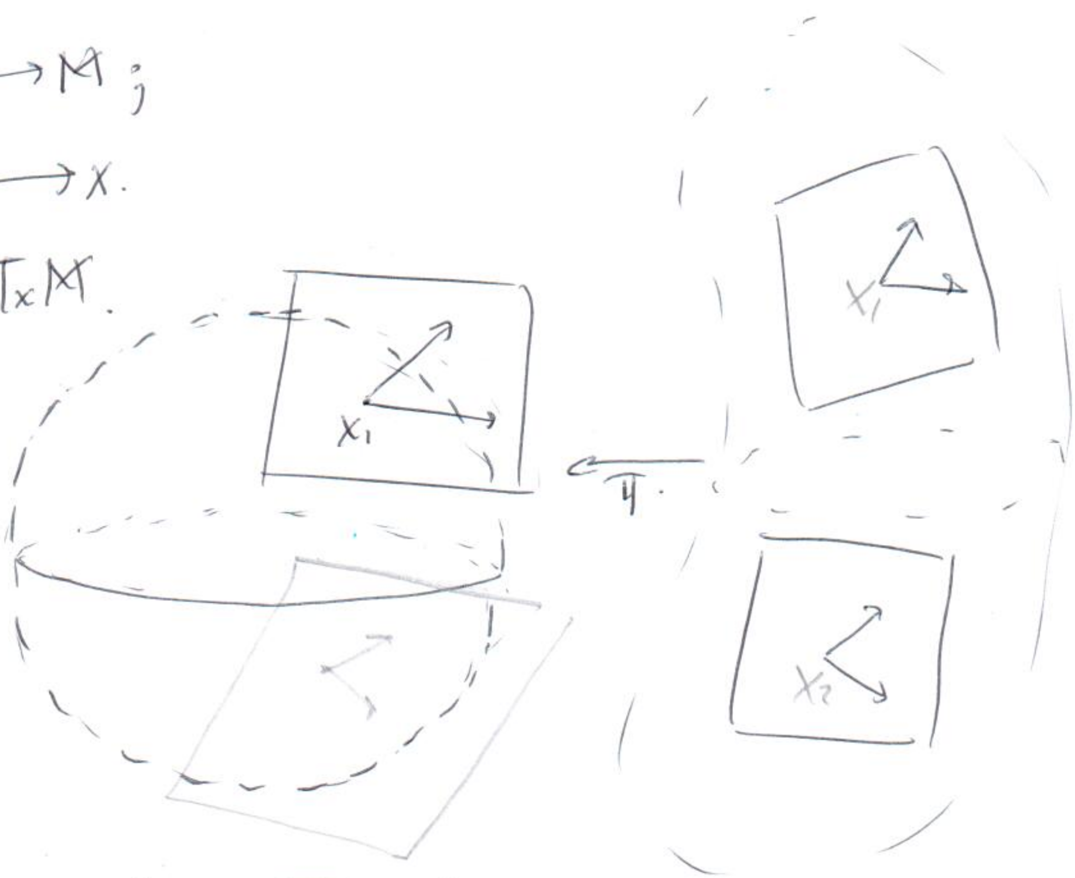
Carta. $\Phi : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$(x, X) \longmapsto (\varphi(x), d_x \varphi(X))$.

- $TM \xrightarrow{\pi} M$;

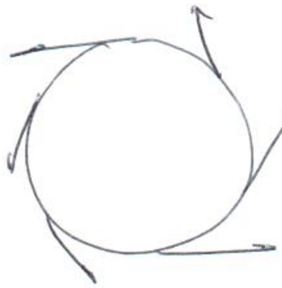
$(x, X) \longmapsto x$.

$\pi^{-1}(x) = T_x M$.



TM parametriza los vectores tangente globalmente.

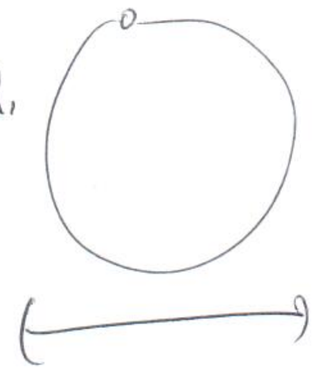
Ejemplo:



$= S^1 = \{x^2+y^2=1\}$, dim $=1$.

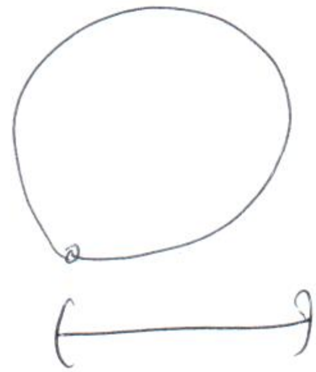
Sabemos que podemos cubrir ese espacio con un abierto en el norte y/o otro en el sur.

U_1



,

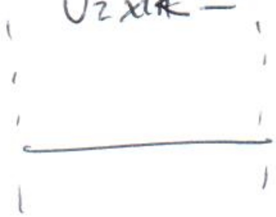
U_2



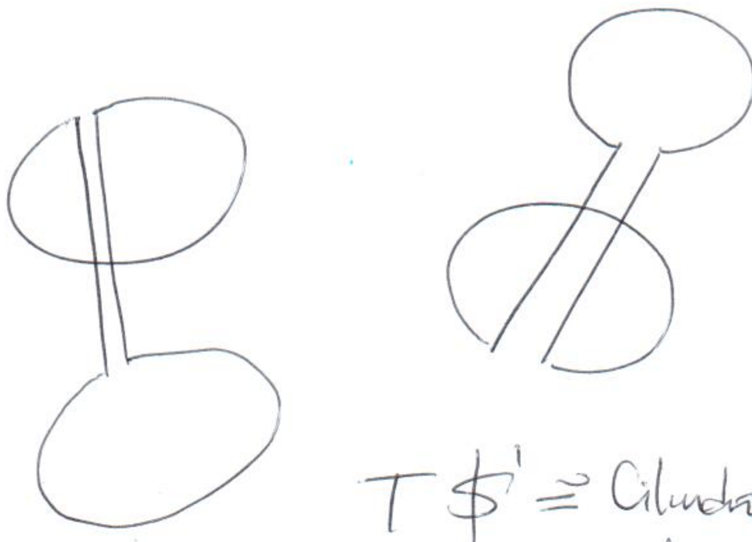
tenemos estos intervalos abiertos por $\mathbb{R}$.

$U_1 \times \mathbb{R} \simeq$

$U_2 \times \mathbb{R} \simeq$



then...



El tangente global es un cilindro.

$T S^1 \cong$ Cilindro.

$\cong S^1 \times \mathbb{R}$

Para saber a que altura estamos en el cilindro.

$$(\theta,\lambda) \longmapsto (\underbrace{\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)}_{(x,\ X)}, -\lambda \operatorname{sen}(\theta)\ \lambda\cos(\theta)).$$

Hagamos cuentas.

Si M^n es una variedad.

$$TM = \bigsqcup_{x\in M} T_x M. \quad \{\text{El tangente de cada punto va a unir}\}.$$

$$= \{(x, X) \mid x \in M,\ X \in T_xM\}.$$

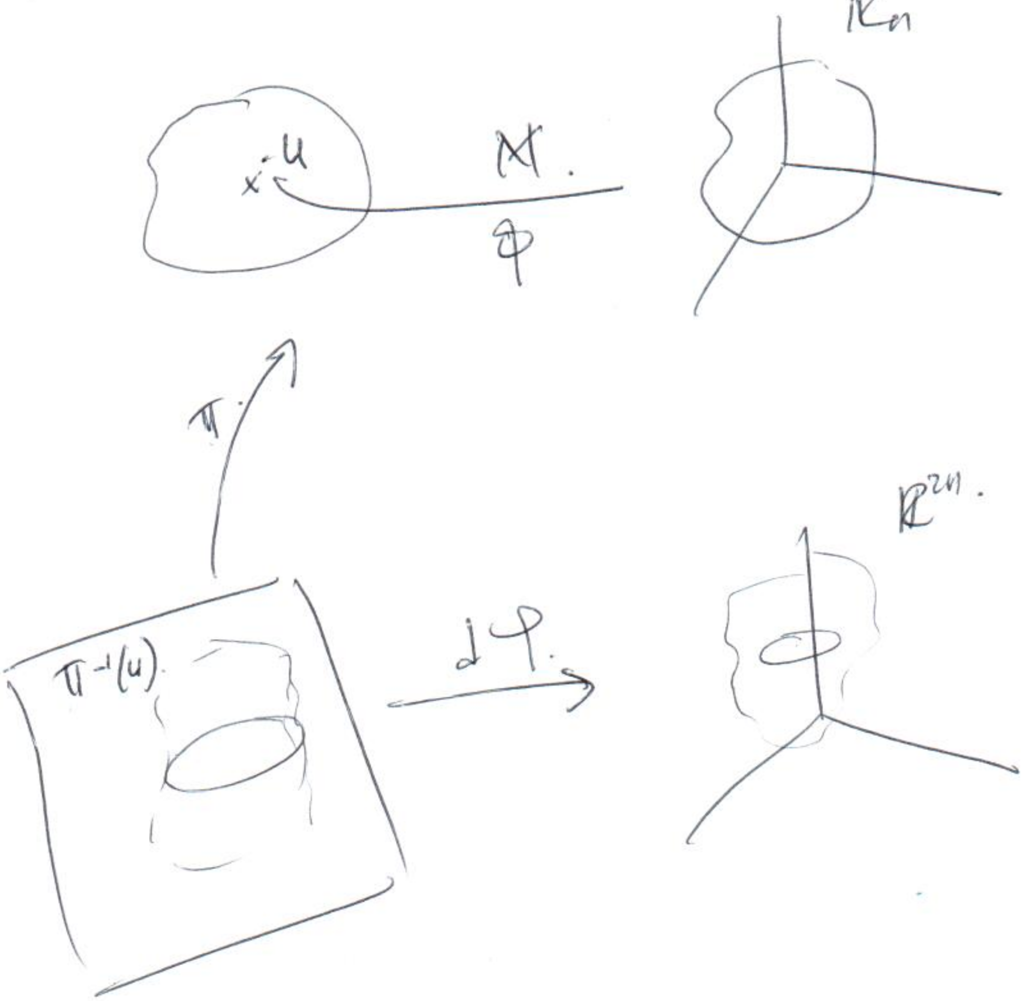
Tenemos una proyección.

$$\begin{array}{ccc} (x, X) & \in & TM \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ x & \in & M \end{array}$$

Construcción del atlas de la siguiente manera.

(ver siguiente).

Sea



· $\pi^{-1}(U)$ abiertos que cubren.

$$d_x\varphi(x) = (\varphi(x), d_x\varphi(x)).$$

· función de transición.

$$d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}), \quad \varphi_i, \varphi_j \qquad U_i \to \mathbb{R}^n \quad U_j \to \mathbb{R}^n.$$

Si tenemos f: función suave entre dos variedades.

$$M^n \xrightarrow{f} N^p, \text{ función suave}$$

$$T_xM \xrightarrow{d_xf} T_{f(x)}N^p$$

$$\underset{\text{induce}}{\sim} \quad TM \xrightarrow{df} TN$$

Si se toma $x \in M$, con coordenadas locales $x_1, \dots x_n$

y se toma un $X \in \cancel{M}$, $X = (X^1, \dots, X^n)$

Entonces el diferencial de f en el punto x evaluado en el vector tangente se calcula.

(cada una son "suaves").

$$d_xf(X) = \left(f_1(x), \dots f_p(x), \; X^i \frac{\partial f^1}{\partial x_i}, \dots \; X^i \frac{\partial f^p}{\partial x_i} \right).$$

Einstein

$$\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f^j}{\partial x_i} := X^i \frac{\partial f^j}{\partial x_i}$$

La primera observación: $d(g \circ f) = dg \circ df$.

§ Fibrados Vectoriales.

Veamos:

En el ejemplo anterior se tenían estas funciones de transición.

$$d(\varphi_j\varphi_i^{-1}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, X) \longmapsto (\varphi_j\varphi_i^{-1}(x), \cancel{d(x)}\, d_x(\varphi_j\varphi_i^{-1})(X))$$

Fijamos $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad d_x(\varphi_j\varphi_i^{-1}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Es una función lineal y podemos pensar en su matriz invertible sobre los números $\mathbb{R}$

$$d_x(\varphi_j\varphi_i^{-1}) \in \underbrace{Gl_p(\mathbb{R})}$$ (Todas la matrices invertibles)

$$d_{(\,)}(\varphi_j\varphi_i^{-1}) : U_{ij} \longrightarrow Gl_p(\mathbb{R}) \text{ "suave".}$$

Definición de fibrado vectorial E.

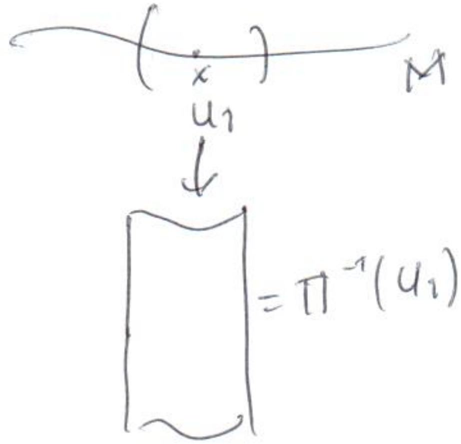
Un fibrado vectorial E de rang ρ sobre M, es una variedad, junto a una función suave π.

$$\pi : E \longrightarrow M \text{ tal que:}$$

$$① .\ \forall x \in M,\ \pi^{-1}(x) := E_x \underset{V.E}{\cong} \mathbb{R}^\rho$$

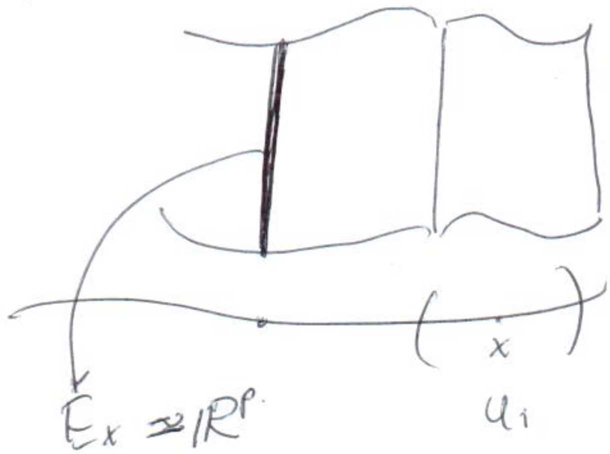
pero además cumple condición de trivialización.

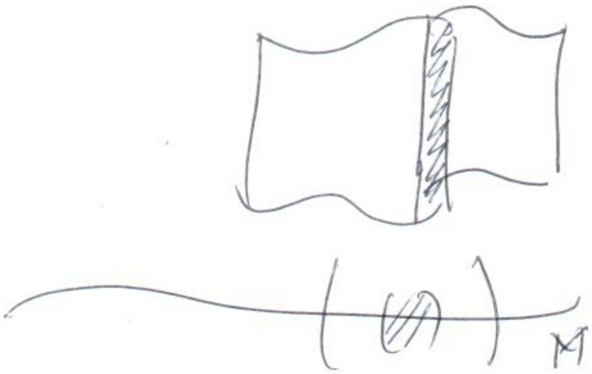
"Condiciones de trivialización"



$= \pi^{-1}(U_1) \simeq U_i \times \mathbb{R}^p$

Recordar que





Si

Se solapan se usan matrices para hallar lo que sucede cuando se solapan.

se recurre a la funciones de transición.

- Funciones de transición.

$$\varphi_j \varphi_i^{-1}(X, \xi) = (x, U_{ij}(x)(\xi))$$

[Hasta un cambio por t, por sugerencia de Pedro].

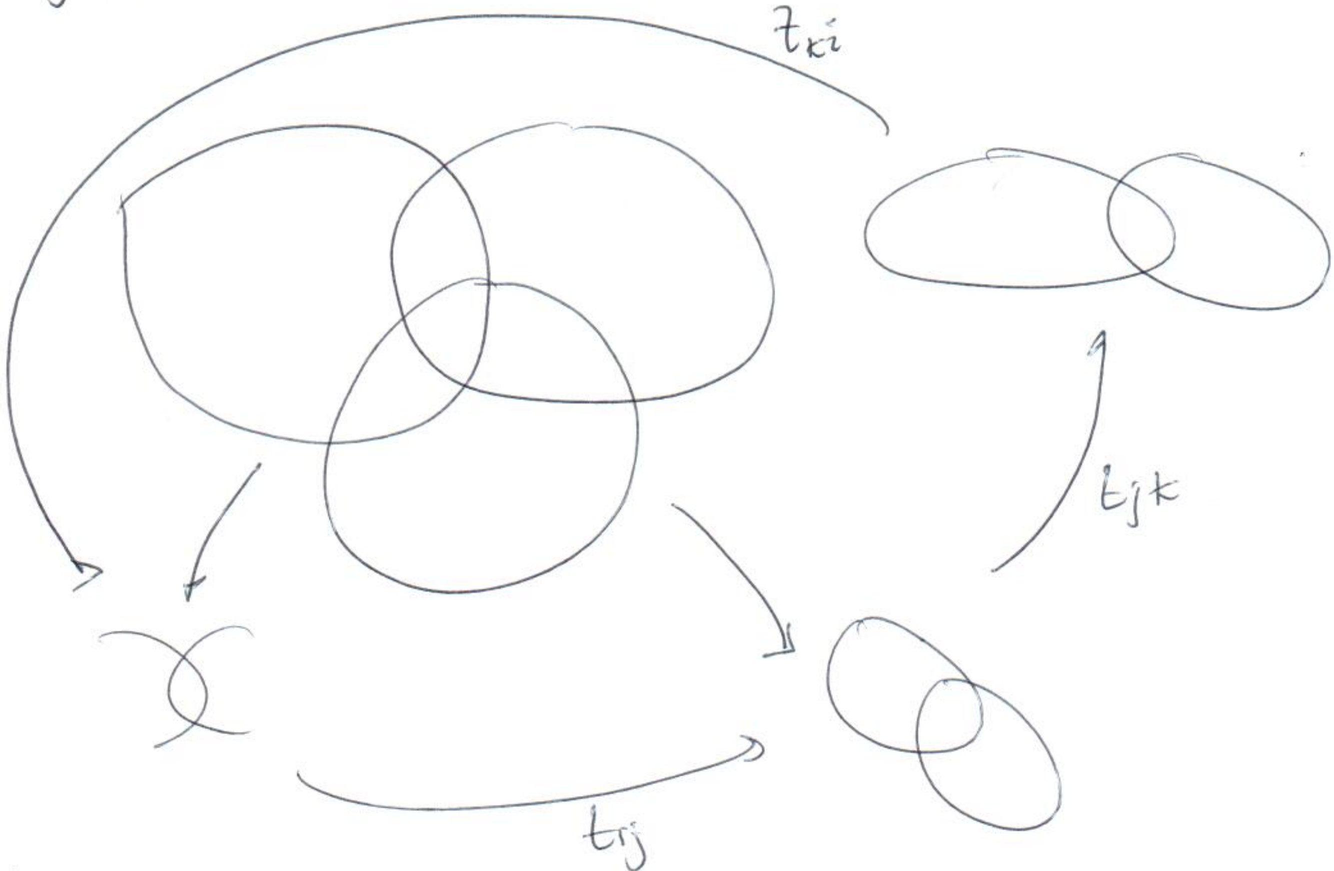
$X \in M$, $x \in U_{ij}$

$\xi \in \mathbb{R}^p$

$t_{ij} : U_{ij} \longrightarrow GL_p(\mathbb{R})$. función suave.

① $t_{ij} \circ t_{ji} = id$

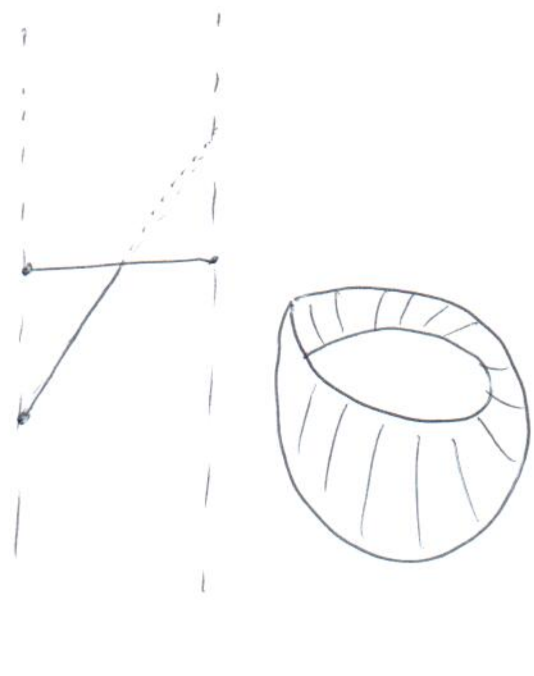
② $t_{ij}\, t_{jk}\, t_{ki} = id$. —— Condición de Cociclo.



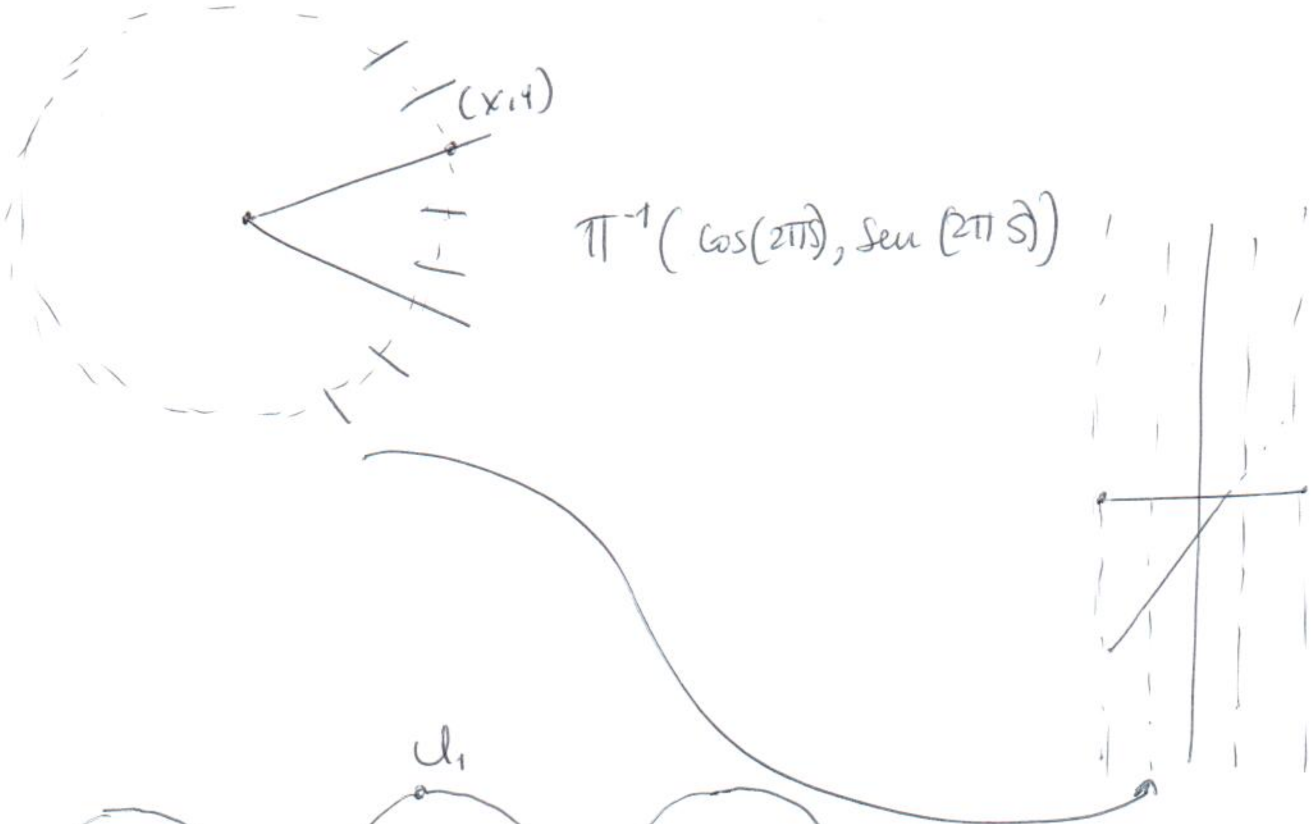
Ejemplo.

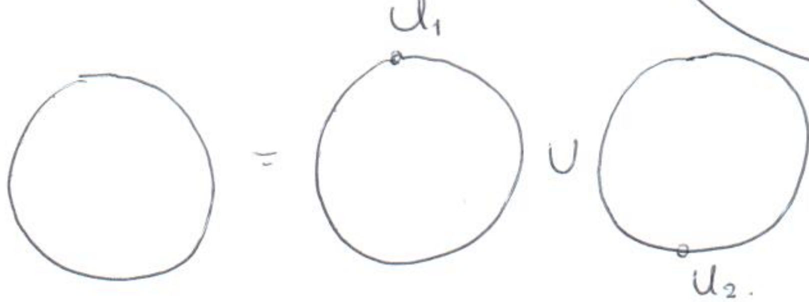
$$S^1 \longleftarrow E = \frac{[0,1]\times\mathbb{R}}{(1,t)\sim(0,-t)}.$$

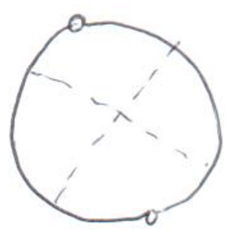
$$(\cos(2\pi s), \operatorname{Sen}(2\pi s)) \longleftarrow [(s,t)]$$



Pagina 7 8.



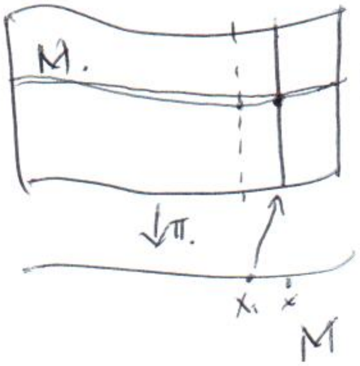


$U_{12} =$  $\quad t_{12}(x,y)(\xi) = \dfrac{x}{y}\xi$

Si E es un fibrado vectorial sobre M

$$\Gamma(M,E) = \Gamma(E)$$
$$:= \left\{ s : M \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{suaves} \\ \pi \circ s = \text{iden} \end{array} \right\}$$

$:=$ secciones suaves de E.



$C^\infty_c(M) = \{$ secciones con soporte compacto y suaves. $\}$

• $(M, \{U_i\}, t_{ij} : U_{ij} \to GL_p(\mathbb{R}))$.

talque $t_{ij} t_{ji} = id$ y cumplan condición de cociclo.

$$E = \left(\bigsqcup_i U_i \times \mathbb{R}^p \right) / \sim$$

v est.

$$x \in U_{ij} \quad (i, x, \xi) \sim (j, x, t_{ij}(x)(\xi))$$

Eso permite construir nuevos fibrados cuando hay fibrados.

Si E es un fibrado de rango p y tenemos matrices $\{t_{ij}\}$ sobre M.
F es fibrado de $rn = s$, $\{S_{ij}\}$.

$$E \oplus F \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t_{ij} & 0 \\ 0 & S_{ij} \end{pmatrix}, \quad E \oplus F \rightsquigarrow t_{ij} \otimes S_{ij}$$

$$E^\vee \sim (t_{ij}^{-1})^T$$

§ 3. Fibrado Cotangente.

Sea M una variedad.

$$T^*M := (TM)^\vee := \text{Fibrado cotangente.}$$

<u>Obs</u>: $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ suave.

$$\forall_x \in M,\ T_xM \xrightarrow{d_xf} \mathbb{R} \in (T_xM)^\vee.$$

$$\longrightarrow df \in T^*M \quad \text{(el dual de } f \text{ pertenece al } T^*M\text{).}$$

Qué serían las secciones?

$$df : M \longrightarrow T^*M$$

$$df \in \Gamma(T^*M) \ (df \text{ son secciones del cotangente}).$$

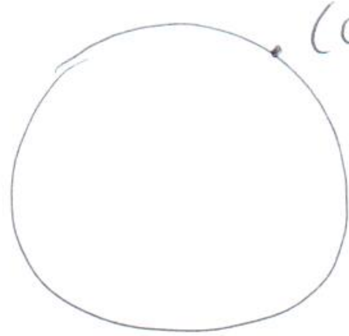
$$:= \Omega^1(M).$$

$$:= \{\text{Espacio de 1-formas}\}.$$

- $x \in M$, tiene coordenadas locales $x_1 \ldots x_n$

podemos escribir $\quad df = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

<u>Ejercicio</u>.



$(\cos(\theta), \operatorname{Sen}(\theta))$.

$\Gamma(TM) := $ Campos vectoriales.

§ 4. Campos Vectoriales.

Que tanto a una funcion que se va moviendo a traves de campos vectoriales que se van moviendo.

Sea $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall x \in M, \quad TM \xrightarrow{d_x f} \mathbb{R}$$

- $X \in T_x M$, $X = (X^1, \dots X^n)$.

$$d_x f(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i$$

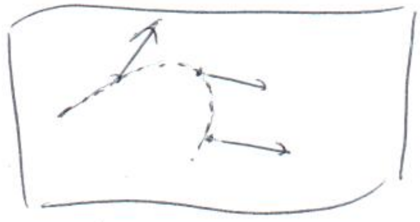
(eso pasa si lo que se fija ~~es el~~ X. ~~Vector tangente~~). y voy variando los Vetores tangente).

Ahora se fijan los vectores tangente.

$X \in T_x M$. $\quad D_X(f) = d_x f(X)$.

$$D_X(f \cdot g) = f D_X(g) + g D_X(f) \quad \text{Leibniz}$$

Definicion de un campo vectorial, es un $X \in \Gamma(TM)$; i.e; $\forall x \in M$, $X(x) \in T_x M$.

M 

§ Derivada de Lie.

Para eso hay que fijar $X(\,) \in \Gamma(TM)$.

la derivada de Lie respecto a ese campo vectorial. X,

es $L_X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$.

$$f \longmapsto df(X).$$

[Esto dice lo siguiente].

$$\cdot\ d_{(\,)} f(X_{(\,)}) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto d_y f(X(y))$$

Si se fija el campo tangente y se estan multiplicando dos cosas

$$L_X(fg) = f L_X(g) + g L_X(f).$$

En particular $C^\infty(M)$ es $\mathbb{R}$ algebra.

Ahora veamos en abstracto que significa una derivación.

A una $\mathbb{R}$ alg una derivación $D: A \longrightarrow A$, lineal

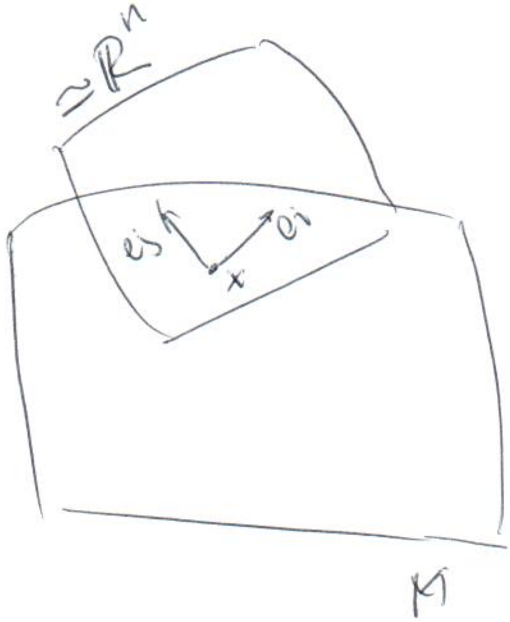
y cumple $D(f.g) = f D(g) + g D(f)$.

$D(A)$ = es el conjunto de todas las derivaciones de A.

$D(C^\infty(M))$ — Todas estas derivaciones estan asociadas a los campos vectoriales.

$D(C^\infty(M)) \simeq \Gamma(TM)$.

{Me tomo un campo vectorial y lo envio a la derivada de Lie}.



X es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Así X localmente se ve.

$X_1, \dots X_n$ (coordenadas locales)

y tenemos la base canónica.

$e_1, \dots e_n, \; e_i = (0, \dots 1, \dots 0)$.

$$X \in T_x M, \; X = \sum X^i e_i$$

Nos podemos preguntar qué es la derivada de f asociada a esa dirección canónica.

$$\Rightarrow L_{e_i} f = df(e_i) = $$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial X_m} \right) \cdot (0, \dots, 1, \dots 0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

$$e_i \sim \frac{\partial}{\partial X_i}$$

- Base dual es $dX_i \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Esta es la base del cotangente localmente.