Def (Whitney 1936): Sea M un esp. topológico. Un atlas C^∞ en M es:

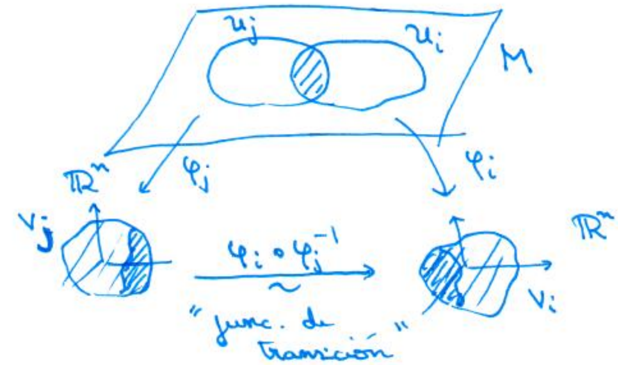
① Un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de M

② Homeomorfismos $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\simeq} V_i \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n$

tq $\forall i,j$ la composición

$$\varphi_i\circ\varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i\cap U_j) \xrightarrow[\text{difeo}]{\simeq} \varphi_i(U_i\cap U_j)$$

es un difeo C^∞.



Ej.: $M^n\subseteq\mathbb{R}^N$ subvar (ie, $\forall x\in M$ existe $\varphi_x: U\subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$ con $\varphi_x(U\cap M)\subseteq \mathbb{R}^n\times\{0\}$) y sea $\pi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{N-n}\to\mathbb{R}^n$, $(x,y)\mapsto x$

$\Rightarrow \{\pi\circ\varphi_x\}_{x\in M}$ es un atlas para M.

Obs: ① $\{\varphi_i\}_{i\in I}\sim\{\psi_j\}_{j\in J}$ son atlas equivalentes si su unión es un atlas.

② $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{C}^n$ & difeo $\rightsquigarrow$ biholomorfo : M variedad compleja.

Def (Whitney 1936): Una variedad M es:

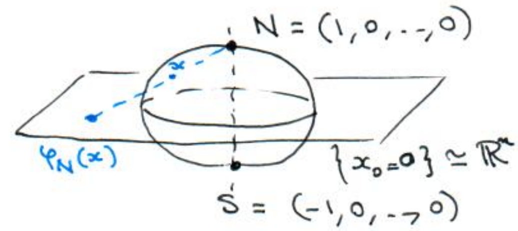
① Un esp. topológico de Hausdorff (ie, puedo separar puntos usando abiertos disjuntos) y numerable al infinito (ie, unión numerable de compactos).

② Una clase de equivalencia de atlas C^∞ en M.

⚠ Aquí, $n := \dim(M)$ es la dimensión de M.

§1. Ejemplos:

① La esfera $S^n \underset{df}{=} \{x\in\mathbb{R}^{n+1}$ tq $x_0^2+\dots+x_n^2=1\}$



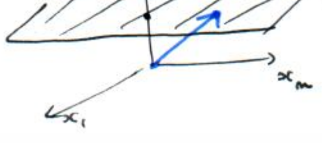
$$\varphi_N(x) = \frac{1}{1-x_0}(x_1,\dots,x_n) \quad \& \quad \varphi_S(x)=\frac{1}{1+x_0}(x_1,\dots,x_n)$$

$$\Rightarrow \varphi_N\circ\varphi_S^{-1}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\sum x_i^2}(x_1,\dots,x_n). \text{ difeo } \checkmark\checkmark$$

② El espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \{$rectas vectoriales en $\mathbb{R}^{n+1}\}$:

Los vectores $v=(x_0,\dots,x_n)$ y $\lambda v = (\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)$ con $\lambda\neq0$, determinan la misma recta $[v]=[x_0,\dots,x_n]=[\lambda x_0,\dots,\lambda x_n]$.

Si pertenecen a $U_0:=\{x_0\neq0\}\subseteq\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, podemos reescalar y considerar $x_0=1$



$\{x_0=1\}\simeq\mathbb{R}^n$

$\varphi_0: U_0 \xrightarrow{\simeq}\mathbb{R}^n$, $[x]\mapsto \frac{1}{x_0}[x]$

Similar: $U_i=\{x_i\neq0\}\simeq\mathbb{R}^n$

(3) Similar (pero más complicado): La <u>variedad Grassmanniana</u>

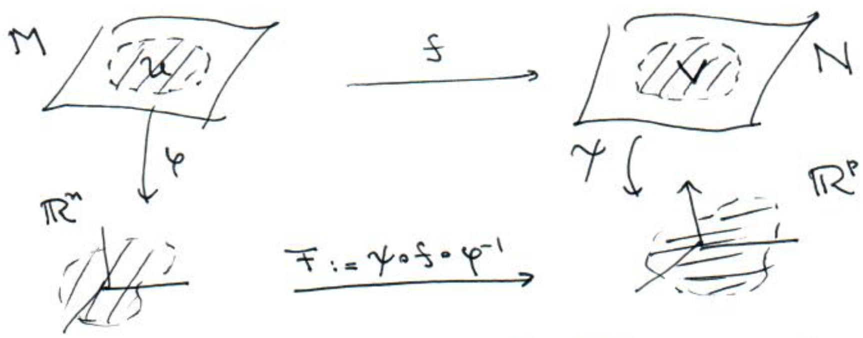
$$Gr(r,n) := \{\text{subesp } \Lambda \simeq \mathbb{R}^r \text{ de } \mathbb{R}^n\}$$

es una variedad de dimensión $r(n-r)$.

(4) <u>Subvariedades</u>: $X^n \subseteq M^N$ es una subvariedad si para cada carta $\varphi: \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^N$, $\varphi(X \cap \mathcal{U})$ es una subvariedad (en el sentido de la vez pasada) de $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^N$. Así, $\varphi|_X$ define una carta en X.

§2. <u>Funciones suaves</u>

<u>Def</u>: Una función continua entre dos variedades $f: M^n \to N^p$ es de <u>clase C^∞</u> si $\forall$ cartas $\varphi: \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ y $\psi: V \subseteq N \to \mathbb{R}^p$

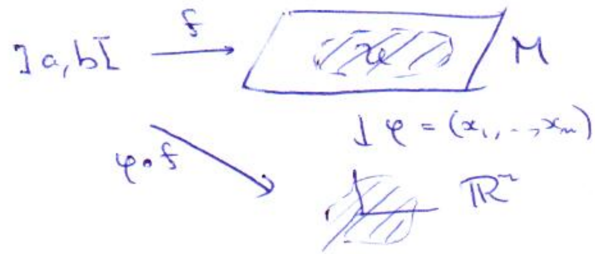


la función $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^p$ es C^∞.

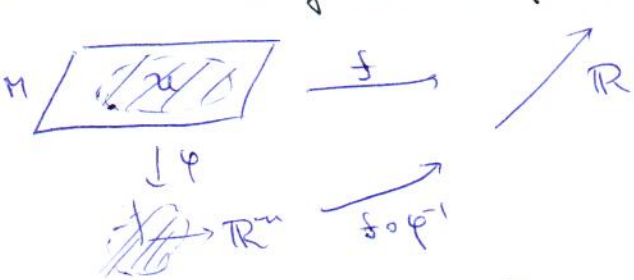
<u>Obs</u>: Si $f: M^n \to N^p$ es de clase C^∞, biyectiva y f^{-1} es de clase C^∞, decimos que f es un <u>difeomorfismo</u> ($\Rightarrow n = p$ y $M \cong N$).

<u>Ejemplos</u>:

(1) $f:]a,b[\to M^n$ es <u>suave</u> (i.e., C^∞) si $\forall$ carta $\varphi: \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ la función $\varphi \circ f :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ es C^∞.



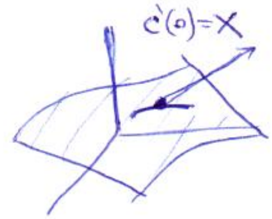
(2) $f: M^n \to \mathbb{R}$ es suave si $\forall$ carta $\varphi: \mathcal{U} \subseteq M^n \to \mathbb{R}^n$ la función $f \circ \varphi^{-1}$ es suave



⚠ Una función suave $f: M^n \to N^p$ es <u>localmente</u> una función C^∞ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$

$\Rightarrow$ Las nociones de inmersión, submersión e incrustamiento están bien definidas!

§3. Vectores tangentes



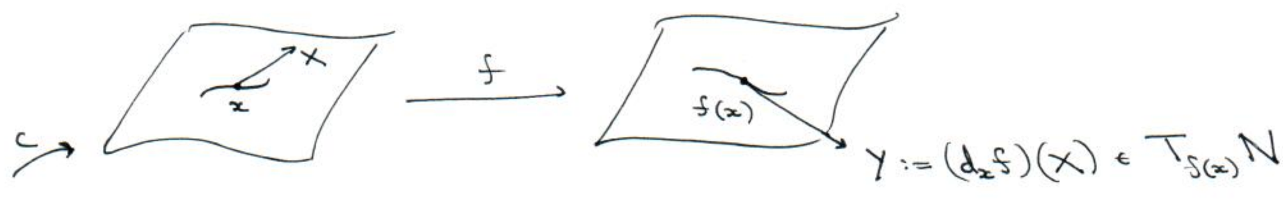
Recuerdo: Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvar, y $x \in M$. Entonces, $X \in \mathbb{R}^N$ es un vector tangente a M en x si $\exists\ c :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ de clase C^1 tq $c(0) = x$ y $c'(0) = X$.

En part, dos caminos c_1 y c_2 definen el mismo vector tangente si $c_1'(0) = c_2'(0)$.

Def: Sea M una variedad y $x \in M$.

1. Dos caminos $c_1, c_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ tq $c_1(0) = c_2(0) = x$ son equivalentes si $\forall$ carta $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ con $x \in \mathcal{U}$ se tiene $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$.
2. Un vector tangente en $x \in M$ es una clase de equiv. de dichos caminos.
3. $T_x M := \{$ vectores tangentes en $x \in M \}$.

Obs: Sea $f : M^n \longrightarrow N^p$ suave



$\Rightarrow d_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$ diferencial de f en $x \in M$. (aplicación lineal)

Regla de la cadena: Si $f : M \to N$ y $g : N \to S$ son funciones suaves,

$d_x(g \circ f) = (d_{f(x)} g) \circ (d_x f)$.

En part, si $f : M \xrightarrow{\sim} N$ difeomorfismo $\Rightarrow (d_x f)^{-1} = d_{f(x)}(f^{-1})$.

Obs importante (más ejemplos la prox. semana):

Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvariedad, y definamos

$$TM := \{(x, X) \in M \times \mathbb{R}^N \text{ tal que } X \in T_x M\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

Entonces, TM es una subvar de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$:

si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una carta en $x \in M$, entonces $\Phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $(x, X) \mapsto (\varphi(x), d_x\varphi(X))$ es una carta para TM ✓

⚠ Si consideramos la proyección $\pi : TM \to M$, $(x, X) \mapsto x$ entonces (por def) tenemos que $\pi^{-1}(x) = T_x M$.

$\rightsquigarrow TM$ es una variedad que "parametriza" todos los vect. tangentes $\rightsquigarrow$ "Fibrado Tangente"