Geometría Riemanniana (Semana 15): "Introducción a la Teoría de Hodge"

La teoría de Hodge, introducida por William Hodge (1903 - 1975), relaciona la topología de variedades compactas con el análisis de operadores elípticos.

§1. Álgebra Lineal

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclideano con base $\{e_1, \dots, e_m\}$. El espacio $\Lambda^p V$ de p-formas multilineales alternadas tiene base $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\}_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le m}$ $\left(\Rightarrow \dim \Lambda^p V = \binom{m}{p}\right)$.
La suma $\Lambda(V) := \mathbb{R} \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots \oplus \Lambda^m V$ (álgebra exterior) también es un espacio euclidiano:

Declaramos que $\Lambda^p V$ y $\Lambda^q V$ son ortogonales si $p \neq q$ y que

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p \rangle := \det\left((\langle v_j, w_k \rangle)_{j,k} \right)$$

⚠ Sup. V orientado y que $\{e_1, \dots, e_m\}$ base ortonormal tq $\det(e_1, \dots, e_m) > 0$.

Def: El operador $\star$ de Hodge es $\star : \Lambda^p V \xrightarrow{\sim} \Lambda^{m-p} V$ definido por la propiedad

$$\alpha \wedge (\star\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \underbrace{(e_1 \wedge \dots \wedge e_m)}_{\stackrel{=}{\text{def}} \text{ dvol}} = \langle \alpha, \beta \rangle \text{ dvol}$$

"forma de volumen"

para todas $\alpha, \beta \in \Lambda^p V$.

Ejemplos y Propiedades:

① $\star 1 = \text{dvol}$, $\star \text{dvol} = 1$, $\star e_1 = e_2 \wedge \dots \wedge e_m$, $\star e_2 = -e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge \dots \wedge e_m$, etc.

② $\star^2 = \star \circ \star : \Lambda^p V \longrightarrow \Lambda^p V$ verifica $\star^2 = (-1)^{p(m-p)} \, \text{Id}_{\Lambda^p V}$.

③ Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ base arbitraria de V y $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Entonces para $\alpha = \alpha_i e^i \in \Lambda^1 V \simeq V^*$ se tiene que $\star\alpha = (-1)^{i-1} g^{ij} \alpha_j \, e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge e^m$, con $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$.

§2. Operadores adjuntos

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana orientada, con $\text{dvol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ forma de volumen (cf. Semana 7). Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E) \longrightarrow M$ fibrado vectorial euclideano (i.e., $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_p} : E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ familia suave de productos internos), entonces en el espacio

$$\Gamma_c(M, E) := \{ s : M \to E \text{ sección con soporte compacto} \}$$

definimos la norma L^2 dada por $\|s\|_{L^2}^2 := \int_M \langle s, s \rangle_E \, \text{dvol}_g$. Denotamos por $L^2(M, E)$ al corresp. espacio de Hilbert, con producto interno

$$\langle\langle s_1, s_2 \rangle\rangle := \int_M \langle s_1, s_2 \rangle_E \, \text{dvol}_g \quad \text{para } s_1, s_2 \in L^2(M, E).$$

Def: Sean $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ y $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ dos fibrados vectoriales euclideanos en (M^n, g), y sea $P : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,F)$ operador lineal. Un operador <u>adjunto formal</u> a P es un operador lineal $P^* : \Gamma(M,F) \to \Gamma(M,E)$ tal que

$$\langle\langle Ps, t\rangle\rangle_F = \langle\langle s, P^* t\rangle\rangle_E \quad \text{para todas } s \in \Gamma_c(M,E),\ t \in \Gamma_c(M,F).$$

<u>Ejemplo</u>: Considerar el operador diferencial $d : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, $f \mapsto df \underset{loc}{=} \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

Sup $\alpha \underset{loc}{=} \sum \alpha_i\, dx^i \in \Omega^1_c(M)$ y $dvol_g \underset{loc}{=} \underbrace{\sqrt{\det(g_{ij})}}_{:= \gamma(x)} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, entonces:

$$\langle\langle df, \alpha\rangle\rangle_{T^*M} \overset{\text{def}}{=} \int_M \langle df, \alpha\rangle\, dvol_g = \int g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \alpha_j \cdot (\gamma\, dx^1 \ldots dx^n)$$

$$\xrightarrow{\text{Int. por partes}} = -\int f \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij} \alpha_j \gamma)\, dx^1 \cdots dx^n \underset{\text{def}}{=} -\int f \gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij}\alpha_j \gamma)\, dvol_g$$

$$\underset{\text{def}}{=} \langle\langle f, d^*\alpha\rangle\rangle_{L^2(M, C^\infty_M)}$$

donde $d^*\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})} \cdot g^{ij} \alpha_j\right) \in C^\infty(M)$ ✓

De manera similar, se tiene:

<u>Lema</u>: El adjunto formal de $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$, $\omega = f_I\, dx^I \mapsto d\omega := df_I \wedge dx^I$ está dado por $d^* = (-1)^{pn+1} \star \circ d \circ \star$.

<u>Dem</u>: Sean $\alpha \in \Omega^p_c(M)$ y $\beta \in \Omega^{p+1}_c(M)$, entonces:

$$\langle\langle d\alpha, \beta\rangle\rangle \underset{\text{def}}{=} \int_M \langle d\alpha, \beta\rangle\, dvol_g \underset{\text{def}}{=} \int_M d\alpha \wedge \star\beta \underset{\text{Leibniz}}{=} \int_M [d(\alpha \wedge \star\beta) - (-1)^p \alpha \wedge d(\star\beta)]$$

$$\underset{\text{Stokes}}{=} (-1)^{p+1} \int_M \alpha \wedge \underbrace{d(\star\beta)}_{\in \Omega^{n-p}(M)} \underset{\star^2 = (-1)^{(n-p)p}\, Id_{\Omega^{n-p}(M)}}{=} (-1)^{p+1+p(n-p)} \int_M \alpha \wedge \star((\star \circ d \circ \star)(\beta))$$

$$\underset{\text{def}}{=} \int_M \langle \alpha, (-1)^{p+1+p(n-p)} (\star \circ d \circ \star)(\beta)\rangle\, dvol_g = \langle\langle \alpha, d^*\beta\rangle\rangle$$

con $d^* = (-1)^{p+1+p(n-p)} \star \circ d \circ \star = (-1)^{pn+1} \star \circ d \circ \star$ pues $p^2 \equiv p \pmod 2$ ✓ ■

§3. Teoría de Hodge:

Sea (M^n, g) variedad Riemanniana orientada. Se define el <u>operador de Hodge-Laplace-Beltrami</u> $\Delta_g : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ mediante $\Delta_g := d^*d + dd^*$, y denotamos por

$$\mathcal{H}^p(M) := \{\alpha \in \Omega^p(M) \text{ tal que } \Delta_g \alpha = 0\}$$

al $\mathbb{R}$-ev. de p-formas armónicas en M.

<u>Obs</u>: (1) Por definición, Δ_g es formalmente auto-adjunto (ie, $\Delta_g^* = \Delta_g$).

(2) $\star \circ \Delta_g = \Delta_g \circ \star$. En part, α armónica $\iff \star\alpha$ armónica.

Ejemplo ($p=0$): Para funciones, $\Delta_g = d^* d$ es el operador de Laplace-Beltrami dado por $\Delta_g f = d^*(df) = d^*\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right)$, i.e., por el Ejemplo anterior

$$\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{\det(g_{ij})}\,\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

Por ejemplo, en $\left(\mathbb{R}^n, g_{eucl} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i\right)$ se tiene $\Delta_{g_{eucl}} f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ ✓

Por ejemplo, en coord. polares $(\mathbb{R}^2, g = dr\otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta)$ se calcula

$$\Delta_g f = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^{-2}\cdot r\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) = -\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)$$ ✓

⚠ En todo lo que sigue, (M^m, g) será una variedad Riemanniana orientada y compacta.

Recuerdo: El p-ésimo grupo de cohomología de de Rham es el $\mathbb{R}$-ev cociente

$$H^p_{dR}(M) := \frac{\{p\text{-formas cerradas}\}}{\{p\text{-formas exactas}\}} = \frac{\{\alpha \in \Omega^p(M) \text{ tq } d\alpha = 0\}}{\{\alpha = d\beta,\ \text{con } \beta \in \Omega^{p-1}(M)\}}$$

Teorema de de Rham (1931): La aplicación lineal "integrar"

$$I : H^p_{dR}(M) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_p(M,\mathbb{R}), \mathbb{R})}_{\simeq H^p(M,\mathbb{R})}, \quad [\alpha] \mapsto I(\alpha) := \int_{(\cdot)} \alpha$$

es un isomorfismo. En part, $\dim_{\mathbb{R}} H^p_{dR}(M) = b_p(M)$ "número de Betti".

La Teoría de Hodge busca dar un refinamiento de lo anterior:

Lema útil: Sea $\alpha \in \Omega^p(M)$. Entonces $\Delta_g \alpha = 0 \iff d\alpha = d^*\alpha = 0$.

Dem: ($\Leftarrow$) Si $d\alpha = d^*\alpha = 0$ entonces $\Delta_g \alpha \underset{\text{def}}{=} d^* d\alpha + dd^*\alpha = 0$ ✓

($\Rightarrow$) Si $\Delta_g \alpha = 0$, entonces $\langle\langle \Delta_g \alpha, \alpha\rangle\rangle = \langle\langle d^* d\alpha, \alpha\rangle\rangle + \langle\langle dd^*\alpha, \alpha\rangle\rangle$
$= \langle\langle d\alpha, d\alpha\rangle\rangle + \langle\langle d^*\alpha, d^*\alpha\rangle\rangle = \|d\alpha\|^2_{L^2} + \|d^*\alpha\|^2_{L^2} = 0$, i.e., $d\alpha = d^*\alpha = 0$ ✓ ∎

Teorema de Hodge (≈ 1933–1936): Sea (M^n, g) var. Riem. orientada y compacta. Entonces:

1. $\mathcal{H}^p(M) = \{\alpha \in \Omega^p(M) \text{ tq } \Delta_g \alpha = 0\}$ es de dimensión finita.
2. Hay una descomposición L^2-ortogonal $\Omega^p(M) = \mathcal{H}^p(M) \oplus \Delta_g(\Omega^p(M))$.

Obs: Argumentos de Análisis Funcional permiten observar que $\ker \Delta_g \perp \mathrm{Im}\,\Delta_g$ (pues $\Delta_g^* = \Delta_g$) y que $L^2(M, \Omega^p) = \mathcal{H}^p(M) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,\Delta_g}$. La parte difícil es probar 1, que $\mathrm{Im}\,\Delta_g$ es cerrado, y que podemos restringirnos a p-formas con coef. suaves (y no sólo L^2).

La siguiente es una generalización del "Teorema de descomposición de Helmholtz"; y se prueba usando el Teorema de Hodge + Lema útil:

Corolario (Descomposición de Hodge): Sea (M^n, g) var. Riemanniana orientada y compacta. Entonces, hay una descomposición ortogonal

$$\Omega^p(M) = \mathcal{H}^p(M) \oplus d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus d^*(\Omega^{p+1}(M))$$

donde $\ker(d) = \mathcal{H}^p(M) \oplus d(\Omega^{p-1}(M))$ y $\ker(d^*) = \mathcal{H}^p(M) \oplus d^*(\Omega^{p+1}(M))$.

Consecuencias importantes:

① Dado que toda forma armónica es cerrada (Lema útil), hay una aplicación natural $\mathcal{H}^p(M) \longrightarrow H^p_{dR}(M)$, $\alpha \longmapsto [\alpha]$, donde $H^p_{dR}(M) \underset{\text{def}}{=} \ker(d)/d(\Omega^{p-1}(M))$

$\Rightarrow \mathcal{H}^p(M) \cong H^p_{dR}(M) \cong H^p(M, \mathbb{R})$ gracias a la Descomposición de Hodge !

② La $\star$ de Hodge induce un isomorfismo $\star : \mathcal{H}^p(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{n-p}(M)$. En particular, se tiene $H^p(M,\mathbb{R}) \cong H^{n-p}(M,\mathbb{R})$ dualidad de Poincaré.

Cultura general: Sea $P : \Gamma(E,M) \longrightarrow \Gamma(F,M)$ un operador diferencial elíptico entre fibrados vectoriales tq $rg(E) = rg(F)$. Entonces:

① $\ker(P)$ y $\ker(P^*)$ son de dim. finita ($\Rightarrow P$ es un operador de Fredholm)

② $\Gamma(M,F) = \ker(P^*) \oplus P(\Gamma(E,M))$ descomp. ortogonal.

Más aún, el índice de P definido por $\mathrm{Index}(P) := \dim \ker(P) - \dim \ker(P^*)$ verifica

$$\mathrm{Index}(P) = \int_M ch(P)\, Td(M) \qquad \text{[Teorema de Atiyah-Singer]}.$$

(Eg. $P = \Delta_g \rightsquigarrow$ "Teorema de la signatura de Hirzebruch").

§4. La Conjetura de Hodge:

Si M variedad compleja (ie, $M \underset{loc}{\cong} \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^n$ con $n = 2m$) con coord locales $z_1, \dots, z_m$ (ie, coord reales $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ con $z_j = x_j + i z_j$) entonces $\alpha \in \Omega^k(M)$ se escribe:

$$\alpha = \sum f(x, y_1, \dots, x_m, y_m)\, dx_I \wedge dy_J = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q \\ p+q=k}} \underbrace{g(z,\bar z)\, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar z_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z_{j_q}}_{k\text{-forma de tipo } (p,q)}$$

$$\rightsquigarrow \Omega^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

⚠ Si M proyectiva (ie, $M \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$) y $Z \subseteq M$ subvar. compleja $\xrightarrow{\text{Chow}}$ subvar algebraica ✓ de $\dim_{\mathbb{C}}(Z) = k$

$\Rightarrow \forall$ $2k$-forma ω de tipo (p,q) con $p > q$ ($\Rightarrow p > k$ pues $p+q = 2k$) se tiene

$$\int_Z \omega = 0 \qquad (\text{pues } \dim_{\mathbb{C}}(Z) = k).$$

Conjetura de Hodge: Sea M proyectiva compleja y $\Omega \in H_{2k}(M, \mathbb{Q})$ clase de homología de dim $2k$. Si $\int_\Omega \omega = 0$ $\forall$ $2k$-forma de tipo (p,q) con $p > q$ $\Rightarrow \Omega = \sum_{i=1}^{l} n_i [Z_i]$ con $n_i \in \mathbb{Q}$ y $Z_i \subseteq M$ subvariedad (algebraica)