Geometría Riemanniana (Semana 14): "Curvatura y Topología"

(M^n, g) variedad Riem. ¿Cómo es signo de R (curvatura) influye en la topología de M?

(1) Teorema de Cartan - Hadamard.

(2) Teorema de Bonnet - Myers.

Observaciones:

(i) $\exp_x : T_x M \longrightarrow M$

$x \in M$, γ geodésica tq $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(x) = X \in T_x M$

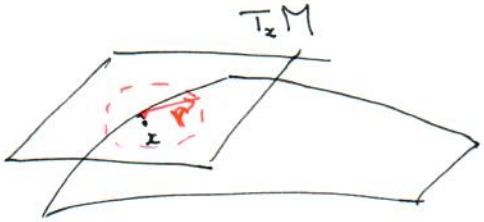
$\Rightarrow \exp_x(X) := \gamma(1)$.

Si $V \subseteq M$ abierto tq $\exp_x^{-1} : V \longrightarrow \mathcal{U} \subseteq T_x M$ es sobreyectivo

$\Rightarrow \exp_x$ es un difeomorfismo local.

$d_0 \exp_x(X) = X$, i.e., $\cancel{d_0} \exp_x \approx 1_{T_x M}$.

(ii)



r_x = radio inyectivo en $x \in M$

$= \sup \{ r > 0 : \exp_x : B_r(0) \subseteq T_x M \to M$ es difeo sobre $B_r(0) \}$

$\Rightarrow r = \inf \{ r_x, x \in M \}$ radio inyectivo sobre M. Hecho: $r > 0$ bajo ciertas condiciones.

(iii) (M^n, g) variedad Riemanniana completa.

$d(p,q) = \inf_{\gamma} L$ (caminos que une p con q)

M completa si (M, d) es un espacio métrico completo.

(iv) Teorema de Hopf - Rinow: (M^n, g) var. Riemanniana conexa. Son equivalentes:

(1) M es completa

(2) $\forall x \in M$, $\exp_x : T_x M \longrightarrow M$ está definida.

En part, dados $p, q \in M$, existe una geodésica minimal que une p y q.

Corolario: (M^n, g) variedad Riemanniana completa conexa con curvatura seccional constante $\exp^* g$ coincide con la métrica de $\mathbb{R}^n$, S^n o $\mathbb{H}^n$.

$(T_x M, \exp^* g)$
$\downarrow \exp_x$

Obs (Radio Conjugado): En coord. normales

$$\rho_{conj} := \inf\{r > 0 : \det(\exp_x^* g) \neq 0 \ , \ x \in S(r) = \partial B_r\}$$

Aquí: $\exp_x^{-1} : V \subseteq M \longrightarrow \mathcal{U} \subseteq T_x M$ coord normales

$\rightsquigarrow$ "coord cilíndricas" $\quad \exp^* g = dr^2 + g_{r}$ métrica sobre S^{n-1}

Para $|X| = 1$, por el Lema de Gauss: $\quad A = -\nabla_X \eta$

$$K\left(\frac{\partial}{\partial r} \wedge X\right) = \frac{\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial r}} \mathrm{II}(x,x) + g(Ax,x)}{\underbrace{g(X,X)}_{=1}}$$

$$= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} (A - A^2) X, X \right\rangle$$

Si $K \leq 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} (A - A^2) X \leq 0 \quad \Rightarrow A \leq -\frac{1}{r}$ y $g_{r} = r^2 g_{S^{n-1}}$

Corolario 15.1: (M^n, g) var. Riemanniana completa conexa. Si $K \leq 0$ entonces $\rho_{conj} = +\infty$. Si $K \leq k_0$ (con $k_0 > 0$) entonces $\rho_{conj} \geq \frac{\pi}{\sqrt{k_0}}$

Nota (Lema 14.1): Curvatura seccional constante. $\frac{\partial A}{\partial r} - A^2 = k$

Si $r \to 0$, $A \sim -\frac{1}{r}$ y A invertible cerca de 0.

(i) $K = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{r}$ y $g_r = r^2$

(ii) $K < 0 \Rightarrow A = \frac{\coth(\sqrt{k}\, r)}{\sqrt{k}}$ y $g_r = \frac{\sinh(\sqrt{k}\, r)}{\sqrt{-k}}$

(iii) $K > 0 \Rightarrow g_r = \frac{\sin^2(\sqrt{k}\, r)}{\sqrt{k}}$

Prueba: Basta analizar el caso $K > 0 \Rightarrow \sin^2(\sqrt{k}\, r) = 0 \Rightarrow \sqrt{k}\, r = \pi$

i.e., $\boxed{r = \frac{\pi}{\sqrt{k}}}$

Obs: Cuando $r < \frac{\pi}{\sqrt{K}} \Rightarrow \det(\exp_x^* g) \neq 0$.

Teorema (Cartan - Hadamard): (M^n, g) var. Riem. completa conexa con $K \leq 0$ $\Rightarrow \exp_x^*$ es un cubrimiento. Si M es simplemente conexa, entonces M es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

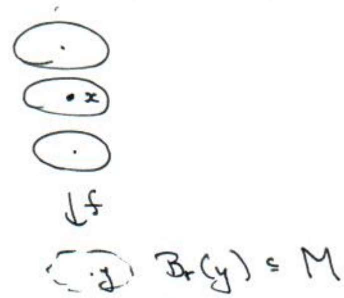
Dem (Idea)

(i) $\exp_x : T_x M \to M$ es un difeo local.

(ii) En particular, $\exp_x$ es una isometría!

[$f: M \to N$ una isometría local con M completa y N conexa $\Rightarrow f$ cubrimiento]

Si $f : (T_x M, \exp_x^* g) \to (M, g)$ tal isometría



r radio inyectivo

Para $y \in M$, $f^{-1}(B_r(y)) = \bigsqcup_{i=1}^{d} V_i \subseteq T_x M$

Si $x \in f^{-1}(y)$ entonces $f|_{B(x,r)} : B(x,r) \to B(y,r)$ es difeo.

$\Rightarrow \exists z \in T_x M$ tq $x \in B(z,r)$ ■

Teorema de Bonnet - Meyers: (M^n, g) variedad Riemanniana conexa.

- (Bonnet): $K \geq k > 0$
- (Myers): $Ric \geq (n-1) k$

Entonces, $\underbrace{\sup_{p,q \in M} dist(p,q)}_{diam(M)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. En part, M es compacta.

Corolario: $\pi_1(M)$ es finito.

Prueba (Idea): Sea $p, q \in M$ y γ geodésica minimal que une p con q.

~~$\Rightarrow$ La segunda variación de longitud de arco está dada por~~

Queremos probar que $L(\gamma) \leq l \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Por contr. supongamos $l > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$

Considere $e_1 = \frac{\gamma'(t)}{l}$, $\gamma : [0,1] \to M$, y completemos una base ortonormal $e_1, e_2, \dots, e_n$. Sea $V_j(t) = \sin(\pi t)\, e_j(t)$ con $V_j(0) = V_j(1) = 0$.

Por la 2^{da} variación de longitud de arco tenemos:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = -\int_0^1 \langle V_j, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} V_j - R(\dot\gamma, V_j)\dot\gamma \rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 \sin^2(\pi t)\Big((n-1)\pi^2 - \underbrace{l^2 \operatorname{Ric}(e_1)}_{\geq (n-1)k \text{ por hipótesis}}\Big)$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 l}{\partial^2 t} < 0 \Rightarrow \exists\, t_0 \in]0,1[$ tq $\gamma(t_0)$ es un punto conjugado de p.

Esto contradice que γ sea una geodésica minimal. ■

Dem del Corolario: $\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} \Rightarrow M$ compacta.

$$\begin{array}{c} (\overline{M}, \overline{g}) \\ \downarrow \pi \\ (M, g) \end{array} \quad \text{cubr. univ., con } \overline{g} = \pi^* g$$

$\overline{M}$ tiene Ric acotada $\Rightarrow$ Por Bonnet-Myers $\overline{M}$ es compacta, i.e., π cubrimiento finito, i.e., $\pi_1(M)$ es finito ✓ ■