Geometría Riemanniana (Semana 11): "Curvatura Riemanniana"

Gauss (1827): $S \subseteq \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow A = 2^{da}$ forma fundamental (matriz simétrica 2x2): $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

Prueba que $K := \det(A) \in C^\infty(S)$ sólo depende de la métrica (indep. de $\mathbb{R}^3$)

ie, $K = K(g_S)$ curvatura Gaussiana es un invariante Riemanniano!

Riemann (1854, 1861): (M, g) var. Riemanniana, $p \in M$, $\dim(M) \geq 2$.

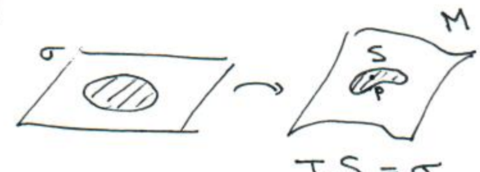
Vimos que $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subseteq T_pM \xrightarrow{\sim} B_\varepsilon(p) \subseteq M$ difeomorfismo

"bola geodésica"

Luego, si $\mathbb{R}^2 \simeq \sigma \subseteq T_pM$ plano vectorial (ie, $0 \in \sigma$)

$\Rightarrow \exp_p|_\sigma : B_\varepsilon(0) \cap \sigma \longrightarrow p \in S^2 \subseteq M^n$

superficie imagen

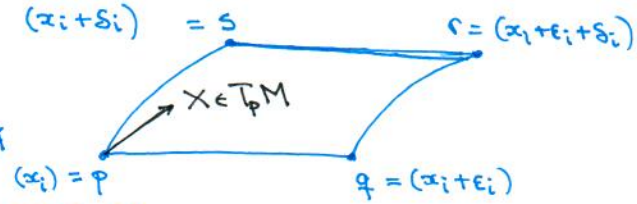


$T_pS = \sigma$

Sea $g_S := g|_S$, entonces (S, g_S) sup. Riemanniana y podemos definir $K(\sigma)(p) = K(\langle , \rangle_{g_S})$ curvatura seccional.

⚠ Sencillo conceptualmente, pero difícil de calcular (se requiere conocer $\exp_p$!)

¿Forma alternativa de definirla?



Idea: Considerar un paralelogramo infinitesimal

Transp. paralelo a lo largo de $\gamma = pqr$

$\rightsquigarrow X_\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$, con $X_\gamma(t_{final}) =: X_\gamma(r) \in T_rM$

Se calcula:

$$X^i_\gamma(q) = X^i - X^j \Gamma^k_{ij}(p)\, \varepsilon_k \quad (*)$$

$$\Rightarrow X^i_\gamma(r) = X^i_\gamma(q) - X^j_\gamma(q)\, \Gamma^k_{ij}(q)\, \delta_k$$

$$\varepsilon^2 = \delta^2 = 0 \nearrow \overset{\approx}{(*)} X^i - X^j \Gamma^i_{jk}(p)\, \varepsilon_j - X^j \Gamma^i_{jk}(p)\, \delta_j$$
$$- X^j \left(\frac{\partial \Gamma^i_{lk}}{\partial x_j}(p) - \Gamma^m_{kj}(p)\, \Gamma^i_{lm}(p) \right) \varepsilon_l\, \delta_m = A - X^j B$$

Similar para $\gamma' = psr$: $X^i_{\gamma'}(r) = A - X^j C$

$$\Rightarrow X_\gamma(r) - X_{\gamma'}(r) = X^i R^l_{ijk}\, \varepsilon_j\, \delta_k$$

donde $$\boxed{R^l_{ijk} := \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i}}$$ "tensor de Riemann"

Para la definición formal, consideramos $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ ← Levi-Civita
$$(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

(Recuerdo: si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Rightarrow \nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^k \Gamma^j_{ik} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$)

Luego, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\nabla_X \nabla_Y Z \in \mathfrak{X}(M)$

⚠ En general, $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$ no es un tensor (ie, no es $C^\infty(M)$ multilineal)

Como $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

$\leadsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ sí lo es!

toma 3 campos y nos da 1 nuevo

Def: El tensor de curvatura de Riemann de M es el tensor de tipo (3,1)

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Obs: Usando la métrica g, definimos el tensor de tipo (4,0)

$$R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z, W) \underset{\text{def}}{=} \langle R(X,Y)Z, W \rangle$$

Prop: Para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos:

(R1) R es un tensor.

(R2) $R(X,Y,Z,W)$ cumple: $R(\cdot,\cdot,Z,W)$ & $R(X,Y,\cdot,\cdot)$ anti-simétrico
$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y).$$

(R3) [Bianchi] $R(X,Y)Y + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.

Importante: $R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \underset{\text{def}}{=} \sum R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}$ (por R1)

$$\Rightarrow R^l_{ijk} = \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} + \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i}$$

$\left(\Rightarrow R \approx \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \text{ orden } 2 \right)$

Def: Sea $p \in M$ y $0 \in \sigma \subseteq T_pM$ un plano. La curvatura seccional de M en σ es:

$$K(\sigma) := \frac{R(u,v,v,u)}{\|u\|_g^2 \|v\|_g^2 - \langle u,v \rangle_g^2} \quad \text{con } \sigma = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u,v)$$

← cuidado si g es pseudo-Riemanniana!

⚠ Sea $\nabla = \nabla_E$ una conexión sobre un fibrado vectorial $E \to M$ arbitrario.
$\Rightarrow$ Para $s \in \Gamma(E)$ sección y $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir $\nabla_X s \in \Gamma(E)$

Similar: $R_E(X,Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$.

$\rightsquigarrow R_E = Ⓗ_E$ tensor de curvatura de ∇_E.

Prop (Algebra Lineal): Sea $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un esp. vectorial euclideano de dim finita, y sean $R_1, R_2 : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ aplicaciones 4-multilineales que verifican (R2) y (R3). Si $R_1(u,v,v,u) = R_2(u,v,v,u) \ \forall u,v \in V \Rightarrow R_1 \equiv R_2$.

Idea: Escribir $u = u_1 \pm u_2$, $v = v_1 \pm v_2$ & usar multilinearidad + R2, R3.
(cf. Identidad de polarización: $\langle u,v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ ❗) ■

Corolario: Las curvaturas seccionales $K(\sigma)$, $\forall \sigma \subseteq T_pM$, determinan R ✓

Ejemplo importante: Sea (M,g) con curvatura seccional $K(\sigma) \equiv \lambda$ constante
$\Rightarrow R(X,Y,Z,W) = \lambda(\langle X,W \rangle_g \langle Y,Z \rangle_g - \langle X,Z \rangle_g \langle Y,W \rangle_g)$.

En efecto, si denotamos por $\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$ al lado derecho, entonces $\widetilde{R}$ cumple R1, R2, R3 ✓ y además

$$\widetilde{R}(u,v,v,u) \underset{\text{def}}{=} \lambda(\|u\|_g^2 \|v\|_g^2 - \langle u,v \rangle_g^2) \underset{\text{Hip.}}{=} R(u,v,v,u) \quad \forall u,v$$

$$\underset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} R \equiv \widetilde{R} \quad ✓$$

Obs: Por definición, para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ fijos, la aplicación
$R(\cdot,X)Y : TM \to TM$ es un endomorfismo

lineal de TM en sí mismo "matriz"

Def: El <u>tensor de Ricci</u>, de tipo $(2,0)$, está definido

$$Ric(X,Y) = tr_g(R(\cdot,X)Y)$$

Explícitamente, si $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ base de T_pM

$$\Rightarrow Ric(X,Y) \underset{\text{def}}{=} \sum_i \langle R(e_i,X)Y, e_i \rangle_g \underset{\text{def}}{=} \sum_i R(e_i,X,Y,e_i)$$

$$\underset{R2}{=} (-1)^2 \sum_i R(X,e_i,e_i,Y) \underset{R2}{=} \sum_i R(e_i,Y,X,e_i) \underset{\text{def}}{=} Ric(Y,X)$$

Así, $Ric(X,Y)$ es un tensor <u>simétrico</u>.

Como siempre, por la fórmula de polarización, la forma bilineal $Ric(X,Y)$ contiene la misma información que su forma cuadrática asociada:

[**Df**: La <u>curvatura de Ricci</u> es $Ric(X) := Ric(X,X)$ para $\|X\|_g = 1$.

De manera similar, se define:

[**Df**: La <u>curvatura escalar</u> de (M,g) es $S := tr_g(Ric) \in C^\infty(M)$.

Explícitamente: Si $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ base <u>ortonormal</u> de T_pM

$$\Rightarrow S \underset{df}{=} \sum_j Ric(e_j,e_j) \underset{df}{=} \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_j,e_i) \underset{R2}{=} \sum_{i\neq j} R(e_i,e_j,e_j,e_i)$$

$$= \sum_{i\neq j} K(\sigma_{ij}) \quad \text{donde } \sigma_{ij} := Vect_{\mathbb{R}}(e_i,e_j) \subseteq T_pM$$

pues $\|e_i\|_g^2 \|e_j\|_g^2 - \langle e_i,e_j\rangle_g^2 = 1$ en este caso $\rightsquigarrow$ "S es la media de curvaturas escalares".

<u>Ejemplo útil</u>: Sea $(\mathbb{R}^n, g_{eucl} = (\delta_{ij}))$, con $R_{ijk}^l \equiv 0$ (y luego $K \equiv 0$).

Consideremos el cambio de métrica <u>conforme</u> $g = e^{2u} g_{eucl} = f^2 g_{eucl}$ con $u = \log(f)$

$\left(\Rightarrow \cos(\measuredangle_g(X,Y)) = \frac{\langle X,Y\rangle_g}{\|X\|_g \|Y\|_g} = \cos(\measuredangle_{eucl}(X,Y)) \checkmark \right)$.

Entonces, $K(\sigma_{ij}) = -\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{k\neq i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right)$

<u>Eg</u>: ① $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_n > 0\}$, $f^2 = \frac{1}{x_n^2}$, i.e., $f = \frac{1}{x_n}$ y $u = -\log(x_n)$

Como $\frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{1}{x_n}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{1}{x_n^2} \Rightarrow K(\sigma_{ij}) = -x_n^2 \cdot \left(\frac{1}{x_n^2}\right) \equiv -1$ <u>constante</u>!

② Similar: En $\mathbb{S}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } \|x\| = r\}$, $f^2 = \frac{4r^4}{(r^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}$

y se calcula $K(\sigma_{ij}) \equiv \frac{1}{r^2}$ <u>constante</u>!

Así, $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{H}^n$) tiene curvatura seccional constante $K \equiv 0$ (resp. $+1, -1$).

$\Rightarrow R$ tiene forma explícita, y luego $Ric = (n-1)\lambda g$ y $S = n(n-1)\lambda$.

<u>Obs</u>: Para $n=2$, la ecuación de curvatura seccional constante $K \equiv \lambda$ está dada por $-\frac{1}{f^2}\Delta u = \lambda \iff -\Delta u = \lambda e^{2u}$.