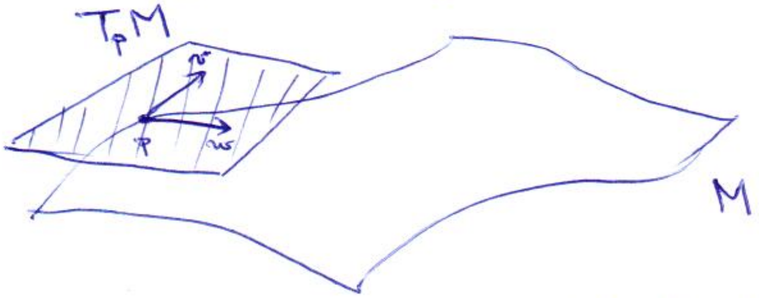
Geometría Riemanniana (Semana 1):

§1. Introducción:

. Riemann (1854) introduce la Geo. Riemanniana en su tesis de Habilitación

[Idea]: "espacio Tangente"



M ← "variedad diferenciable" (ie, localmente $\mathbb{R}^n$)

En cada $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$ hay una noción de distancia euclideana (ie, producto punto)

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto g_p(v,w) \text{ "=" } \langle v, w\rangle_p$$

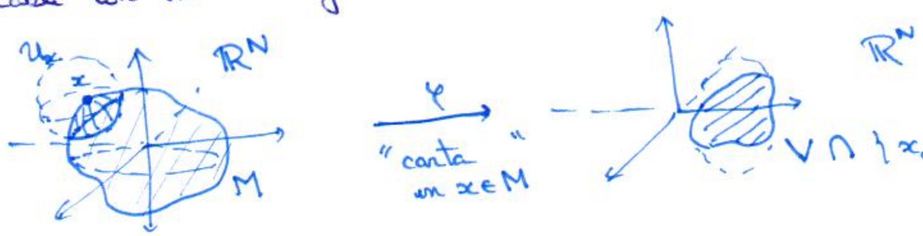
y varía de manera "suave" con el punto ⇝ $\boxed{(M, g) \text{ variedad Riemanniana}}$

§2. Subvariedades de $\mathbb{R}^N$:

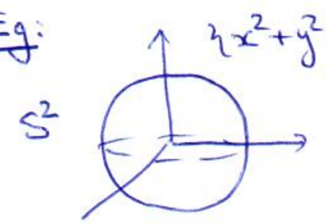
Históricamente, primero se estudiaron variedades dentro del espacio ambiente $\mathbb{R}^N$ (⚠ Whitney (1936): A posteriori, siempre es el caso!).

Def: Una subvariedad de dim n de $\mathbb{R}^N$ es $M \subseteq \mathbb{R}^N$ tq
" $\forall x \in M$, $\exists\, \mathcal{U}_x \subseteq \mathbb{R}^N$ vecindad de x y $\exists\, V \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto junto con un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \to V$ tq $\varphi(M \cap \mathcal{U}_x) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ "

(diferenciable con inversa diferenciable)



Eg: $\{x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$



si (x,y,z) cumple $z>0 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = (x, y, z - \sqrt{1-x^2-y^2})$

cumple $\varphi|_{S^2 \cap \{z>0\}} = (x, y, 0)$ ✓

similar si $z<0$ y $\pm x > 0, \pm y > 0$.

Misma idea: $S^n \underset{\text{def}}{=} \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } x_0^2+\dots+x_n^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ subvar de dim n.

"Más general": si $f: \mathcal{U} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ suave (ie $\mathcal{C}^\infty$)

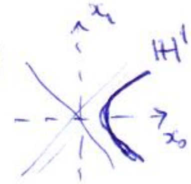
$\Rightarrow M = \{(x,f(x)),\ x\in\mathcal{U}\}\subseteq\mathbb{R}^N$ subvar de dim n

(La carta local es $\varphi(x,f(x))=(x,0)$).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ El espacio hiperbólico

$$\mathbb{H}^n := \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1 \text{ y } x_0>0\}$$

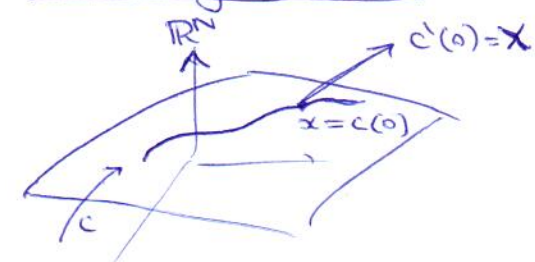
es una subvar. de dim n de $\mathbb{R}^{n+1}$.



§3. Vectores tangentes: $M^n\subseteq\mathbb{R}^N$ subvar.

Def: Fijar $x\in M$. Decimos que $X\in\mathbb{R}^N$ es un vector tangente a M en el punto $x\in M$ si:

"$\exists\ c:]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow M\subseteq\mathbb{R}^N$ curva de clase $\mathcal{C}^1$ tq $c(0)=x$ y $c'(0)=X$"

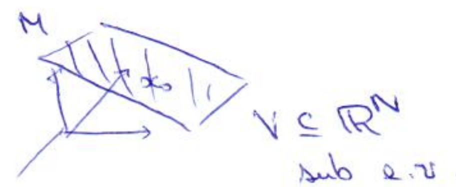


$T_x M := \{X\in\mathbb{R}^N \text{ tq } X \text{ tangente a } M \text{ en } x\}$ $\quad]-\varepsilon,\varepsilon[$

Eg: (1) $T_x\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ (considerar rectas)

(2) si $M = x_0 + V$ espacio afín de $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow T_x M = V \quad \forall x\in M$.

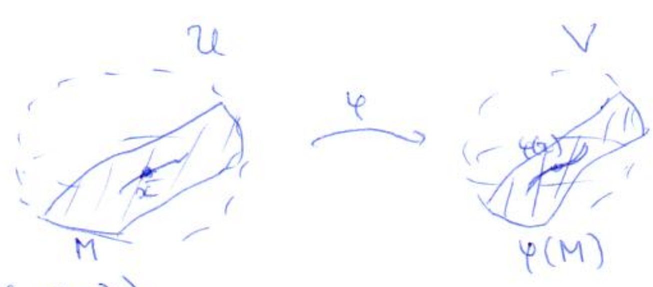


(3) Sea $\varphi: \mathcal{U} \underset{\text{ab.}}{\subseteq} \mathbb{R}^N \longrightarrow V \underset{\text{ab.}}{\subseteq} \mathbb{R}^N$ difeo.

si $c(t)\in M\cap\mathcal{U}$ y $c(0)=x$

$\Rightarrow \varphi(c(t))\in\varphi(M)\cap V$

y $\frac{d}{dt}\{\varphi(c(t))\}\big|_{t=0} \overset{\text{cadena}}{=} (d_x\varphi)(c'(0))$



Luego: $X\in T_xM \iff (d_x\varphi)(X)\in T_{\varphi(x)}(\varphi(M))$

ie, $T_xM \underset{\text{biy}}{\xrightarrow{\sim}} T_{\varphi(x)}(\varphi(M))$. $\quad$ $\mathbb{R}$-ev

⚠ En part, si φ es una carta local: $T_xM = (d_x\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^n\times\{0\})$

$\Rightarrow T_xM$ es un $\mathbb{R}$-ev. de dim n.

§4. Submersiones, Inmersiones e Incrustamientos

Terminemos por mencionar algunas formas de construir muchos ejemplos!

Def: $f : \mathcal{U} \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ es una <u>submersión</u> si la (matriz) diferencial $d_x f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ es sobreyectiva $\forall x \in \mathcal{U}$.

Una consecuencia del Teorema de la Función Inversa (MAT023) es:

Teorema: Sea $f : \mathcal{U} \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ submersión y sup. que $b \in \mathbb{R}^{N-n}$ es tal que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$. Entonces:

$f^{-1}(b) \subseteq \mathbb{R}^N$ es una subvar de dim n, y para todo $x \in f^{-1}(b)$ se cumple que $T_x f^{-1}(b) = \ker(d_x f)$.

Ej:

① $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_0^2 + \ldots + x_n^2$ cumple $d_x f \text{ "=" } (\nabla f)(x)$
$= (2x_0 \cdots 2x_n)$

y luego f es una submersión en $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow S^n \underset{def}{=} f^{-1}(1) \cap \mathcal{U}$ es una variedad n-dimensional.

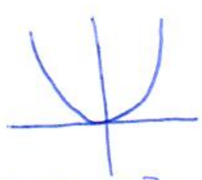
② Sea $\mathcal{U} = \{x_0 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$

$\Rightarrow \mathbb{H}^n \underset{def}{=} f^{-1}(1) \cap \mathcal{U}$ es una variedad n-dimensional.

Def: $f : \mathcal{U} \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una <u>inmersión</u> si $d_x f$ es inyectiva $\forall x \in \mathcal{U}$.

¡Pero no es subvar!

Ej:

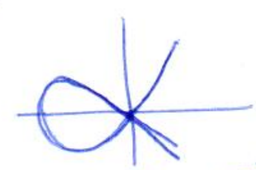


OK ✓

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t^2)$

"Malo"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t^2, t^3)$



OK ✓

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$

Def: $f : \mathcal{U} \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es un <u>incrustamiento</u> (embedding) si f es una inmersión y $\mathcal{U} \xrightarrow[\sim]{f} f(\mathcal{U})$ homeomorfismo

Hecho:
① Si f es una función propia (ie, f^{-1}(compacto) es compacto) e inmersión inyectiva $\Rightarrow f$ incrustamiento.
② f incrustamiento $\Rightarrow f(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^N$ subvar. de dim n.