ON SURFACES

VGA

Abstract. We discussed informally on some basic properties of analytic and algebraic surfaces.

1. Superficies

Una superficie analítica compleja es una variedad analítica compleja lisa (manifold en inglés) de dimensión compleja 2. Nos interesaremos en una sub categoría de la categoría de las superficies analítica complejas compactas, ellas son las superficies algebraicas complejas lisas.

De manera más precisa ellas serán superficies analítica complejas compactas S, tales que exista una inmersión $\Phi : S \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. En el caso de dimensión compleja 1, se tiene:

Example 1.1. *Sea S una superficie de Riemann compacta y conexa de género $g \geq 3$, no hiiperelíptica.. La clase canónica de S, K_S determina una inmersión $\Phi : S \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, del teorema de Riemann-Roch, se tiene que dim $\mid K_S \mid= g-1$ y deg $\mid K_S \mid= 2g-2$. Entonces $\Phi(S)$ es una curva analítica compleja lisa, de un teorema de Chow se tiene que $\Phi(S)$ es una curva algebraica compleja de grado $2g-2$ de $\mathbb{P}_{g-1}(\mathbb{C})$.*

Sea S una superficie algebraica compleja lisa. Como S es compacta,conexa y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 4$, podemos considerar sus grupos de homología simplicial, $H_1(S,\mathbb{Z})$,...,$H_4(S,\mathbb{Z})$, denotamos por.

$$b_i = \mathrm{rank} H^i(S,\mathbb{Z}) = \mathrm{rank} H_i(S,\mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S,\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} H_i(S,\mathbb{R})$$

los números b_i, $i \in \{1,...,4\}$ se llaman los números de Betti de S. La característica topológica de Euler es la suma alternada de los números de Betti:

$$\chi_t(S) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i b_i$$

Un teorema importante que concierne a la homología de S es:

Theorem 1.1. *(dualidad de Poincaré) Sea X una variedad compacta lisa n-dimensional, la forma de intersección:*

$$H_k(X,\mathbb{Z}) \times H_{n-k}(X,\mathbb{Z}) \to H_n(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

es unimodular, es decir cada funcional lineal $H_{n-k}(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ se expresa como la intersección con alguna clase $[\alpha] \in H_k(X,\mathbb{Z})$ y cada clase que tiene número de intersección 0 con todas las clases de $H_{n-k}(X,\mathbb{Z})$ es una clase de torsión.

En particular, para una superficie S de $\dim_{\mathbb{R}} S = 4$, de la dualidad de Poincaré se tiene:

$$b_0 = b_4 = 1 \quad b_3 = b_1$$

la forma de intersección

$$H^2(S,\mathbb{R}) \times H^2(S,\mathbb{R}) \to H^4(S,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

es una forma simétrica no degenerada, denotamos su tipo por (b^+, b^-) entonces $b_2 = b^+ - b^-$.

Remark 1.1. *Si X es una variedad algebraica compleja n-dimensional lisa tambíen podemos considerar los números de Betti y la forma de intersección determinada por la dualidad de Poincaré. El teorema de la sección hiperplana de Lefschetz permite conocer los números de Betti y la forma de intersección para una hipersuperficie lisa de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.*

Aparecen las formas diferenciales y las formas holomorfas etc.
Consideramos una superficie analítica compleja, compacta y connexa S, denotamos por $\mathcal{O}_S$ el haz (faisceaux, sheave) de funciones holomorfas globales, por Ω^1_S el haz de 1-formas holomorfas globales y por Ω^2_S el haz de 2-formas holomorfas globales. Notar que $\Omega^0_S = \mathcal{O}_S$ y $\Omega^2_S = \wedge^2\Omega^2_S = \omega_S$. Notar que ω_S es un fibrado en rectas, o un haz invertible asociado a un divisor canónico.

La irregularidad de S es la dimensión del espacio vectorial de 1-formas holomorfas globales: $q = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega^1_S)$ y el género geométrico es la dimensión del espacio vectorial de 2-formas holomorfas globales $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega^2_S)$.

La sucesión exacta de haces:

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}^*_S \to \{0\}$$

da origen a la sucesión de cohomología:

$$\{0\} \to H^0(S,\mathbb{Z}) \to H^0(S,\mathcal{O}_S) \to H^0(S,\mathcal{O}^*_S) \to H^1(S,\mathbb{Z}) \to ...$$

$$... \to H^1(S,\mathcal{O}_S) \to H^1(S,\mathcal{O}^*_S) \to H^2(S,\mathbb{Z}) \to H^2(S,\mathcal{O}_S) \to ...$$

como $b_0 = 1$, $H^0(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, siendo S compacta $H^0(S,\mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$, $H^0(S,\mathcal{O}^*_S) \cong \mathbb{C}^*$.

Aparecen el teorema de de Rham, Dolbeaut y el teorema de Hodge, etc.
Entonces $b_1 = \dim_{\mathbb{R}} H^0(S,\mathcal{E}^{1,0}_S) + \dim_{\mathbb{R}} H^0(S,\mathcal{E}^{0,1}_S) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(S,\Omega^{1,0}_S) + \dim_{\mathbb{R}} H^0(S,\Omega^{1,0}_S) = 2q$. Nos concentramos por el momento en:

$$H^1(S,\mathbb{Z}) \to H^1(S,\mathcal{O}_S) \to H^1(S,\mathcal{O}^*_S) \to H^2(S,\mathbb{Z})$$

y denotamos por $c_1 : H^1(S,\mathcal{O}^*_S) \to H^2(S,\mathbb{Z})$ la aplicación que a cada fibrado en recta $\mathcal{L}$ asocia la clase de Chern $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(S,\mathbb{Z})$

Example 1.2. El plano proyectivo

Consideramos el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_2$ con cordenadas homogéneas $(z_0 : z_1 : z_2)$, ella es una superficie algebraica, tenemos la descomposición celular:

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}^1 \cup \{p\}$$

como la aplicación borde $\partial : e^{2k} \longrightarrow e^{2k-1}$ *es nula tenemos que:* $H_i(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) = \{0\}$ *si* i *es impar,* $0 < i < 4$.

Si definimos $P_i(\mathbb{C}) = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}_2 \mid z_{i+1} = ... = z_2 = 0\}$ *tenemos la descomposición:*

$$P_0(\mathbb{C}) \subset P_1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}_2$$

donde cada $P_i(\mathbb{C}) - P_{i-1}(\mathbb{C})$ *es isomorfo a* $\mathbb{C}^i$*, cada* $P_i(\mathbb{C})$ *corresponde a una clase de homología* $[P_i] \in H_{2i}(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z})$*. Tendremos entonces:*

$$H^0(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \qquad H^1(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \{0\} \qquad H^2(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \qquad H^3(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \{0\} \qquad H^4(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Para los números de Betti y la característica de Euler topológica se tiene:

$$b_0 = b_4 = 1 \qquad b_1 = b_3 = 0 \qquad b_2 = 1 \qquad \chi(\mathbb{P}_2) = 3$$

Example 1.3. Superficies abelianas

Sea $T \cong \mathbb{C}^2/L$ *un toro analítico complejo* 2*-dimensional, es decir una superficie abeliana, se tiene claramente que* $\pi_1(T)$ *es abeliano y* $\pi_1(T) \cong H_1(T,\mathbb{Z}) \cong L \cong \mathbb{Z}^4$*, el producto cup induce una aplicación:*

$$cup : \wedge^n H^1(T,\mathbb{Z}) \to H^n(T,\mathbb{Z})$$

que es un isomorfismo, entonces se tiene:

$$H^0(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \qquad H^1(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4 \qquad H^2(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6$$
$$H^3(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4 \qquad H^4(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

de donde para los números de Betti y la característica d Euler topológica se tiene:

$$b_0 = b_4 = 1 \qquad b_1 = b_3 = 4 \qquad b_2 = 6 \qquad \chi_t(T) = 0$$

La cohomología $H^k(S,\mathbb{C}) = H^k(S,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ se puede estudiar con ayuda de la descomposición de Hodge. Se definen los números de Hodge de S como: $h^{p,q} = \dim H^q(S,\Omega^p)$, se tiene que la irregularidad $q = h^{1,0}$ y el género geométrico es $p_g = h^{2,0}$

Si S es una superficie algebraica, podemos utilizar la teoría de Hodge para la descomposición de su cohomología, se tiene entonces:

$$h^{p,q} = h^{q,p} = h^{2-p,2-q} = h^{2-q,2-p}$$
$$b_i = \sum_{p+q=i}^{4} h^{p,q} \qquad b_0 = b_4 = 1$$

Notar que este caso estos números se pueden colocar en el siguente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{0,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega^0_S) & & \\ & h^{1,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega^1_S) & & h^{0,1} = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S,\Omega^0_S) & \\ h^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega^2_S) & & h^{1,1} = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S,\Omega^1_S) & & h^{0,2} = \dim_{\mathbb{C}} H^2(S,\Omega^0_S) \\ & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\ & & h^{2,2} & & \end{array}$$

el cual es llamado el diamante de Hodge.

Notar que $\Omega^0 = \mathcal{O}_S$ y

$$q = h^{1,0} = h^{0,1} = \dim H^0(S,\Omega^1_S) = \dim H^1(S,\mathcal{O}_S)$$

$$p_g = h^{2,0} = h^{0,2} = \dim H^0(S,\Omega^2_S) = \dim H^2(S,\mathcal{O}_S)$$

entonces para una superficie el diamante de Hodge es:

xxxxxxxxxx

Example 1.4. El plano proyectivo

Como $H^q(\mathbb{P}_2,\Omega^p_{\mathbb{P}_2}) = \{0\}$ si $p \neq q$ y $H^q(\mathbb{P}_2,\Omega^p_{\mathbb{P}_2}) = \mathbb{C}$, entonces $q = 0$ y $p_g = 0$. Para los números de Hodge se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

La sucesión exacta

$$H^1(\mathbb{P}_2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}) \longrightarrow Pic(\mathbb{P}_2) := H^1(\mathbb{P}_2,\mathcal{O}^*_{\mathbb{P}_2}) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z})$$

se transforma en:

$$\{0\} \longrightarrow Pic(\mathbb{P}_2) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z}$$

entonces $Pic(\mathbb{P}_2) \cong \mathbb{Z}$ y cada divisor es linealmente equivalente a un múltiplo de una recta.

Para la clase canónica $K = -3H$, $b^+ - b^- = 1$, $K^2 = 9$ y para la dimensión de Kodaira $\kappa = -\infty$.

Example 1.5. Superficies abelianas

Si (z_1,z_2) son coordenadas en $\mathbb{C}^2$ ellas descienden a T y se tienen coordenadas locales que estan bien definidas módulo las translaciones por L. Las 1-formas dz_1, dz_2 y la forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ estan bien definidas globalmente y generan a $H^0(T,\Omega^1_T)$ y $H^0(T,\Omega^2_T)$ de donde la irregularidad es $q = 2$ y el género geométrico es $p_g = 1$. Como la forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ no tiene polos ni ceros en T, la clase canónica K_T es trivial.

Para los números de Hodge se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 1 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

El retículado $H^2(T,\mathbb{Z})$ puede intersectar a $H^1(T,\Omega^1_T) \subset H^2(T,\mathbb{C})$ en cualquier rango comprendido entre 0 y 4. Si el rango fuese 0 no habrian divisores amplios en T y T no sería *una superficie algebraica. Un un toro analítico complejo 2-dimensional es una variedad algebraica proyectiva si y solamente si y solamente si existe una forma bilineal*

$$H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$$

tal que $H(ix, y)$ sea simétrica y positiva definida y además restringida al retículado L tome valores racionales. La forma H es una polarización en X, tradicionalmente llamada una forma de Riemann.

Sea L el retículado de $\mathbb{C}^2$ generado por los vectores $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (i, 0)$, $v_3 = (\pi\sqrt{2}, \pi)$ y $v_4 = (\sqrt{2}, i)$. Se puede probar que para el toro analítico complejo 2-dimensional $X \cong \mathbb{C}^2/L$ no puede existir una forma de Riemann, entonces el no es una superficie algebraica.

2. Linear system of cubics

Let V be a $(n + 1)$-dimensional $\mathbb{C}$-vector space, and $\{x_0, ..., x_i, ..., x_{n+1}\}$ be a basis of V^*. We will denote by $S^d(V^*)$ the $\mathbb{C}$-vector space of homogeneous forms of degree d and by $\mathbb{P}_n(V)$ the complex n-dimensional projective space. Usually we will denote the homogeneous forms of degree d by lower case letters, and the hypersurface given the zero set of the form by the corresponding capital letter.

We will recall that the canonical divisor of $\mathbb{P}_n$ is denoted by $K_{\mathbb{P}_n}$ and $K_{\mathbb{P}_n} = O_{\mathbb{P}_n}(-(n+1)H)$. Usually when is considered as a line bundle or an invertible sheaf is denoted by $\omega_{\mathbb{P}_n}$.

We will consider mainly complex projective surfaces, therefore we will begin recalling some basic properties of the complex projective plane. Let $\mathbb{P}_2$ be the complex projective plane, its canonical class is $K_{\mathbb{P}_2} = O_{\mathbb{P}_2}(-3L)$. Its Picard group denoted by Pic $\mathbb{P}_2 \cong \mathbb{Z}$, where we can take the class of a line as a generator.

Let S be a complex projective surface Pic S is the group of invertible sheaves up to isomorphism (isomorphic to the group of divisors modulo linear equivalence). In Pic S there exist a symmetric bilinear form: Pic $S \times$ Pic $S \to \mathbb{Z}$.

As an exercise you can consider $S \cong \mathbb{P}_2$ and S a non singular quadric surface of $\mathbb{P}_3$, then describe their Picard groups.

Let S be a surface, $\epsilon : \widehat{S} \to S$ the blowing up of S at a point $p \in S$ and $\epsilon^{-1}(p) = E$ then:

(1) Pic $\widehat{S}$ = Pic $S \oplus \mathbb{Z}$
(2) If $C, D \in$ Pic S, then $\epsilon^*C \cdot \epsilon^*D = C \cdot D$
(3) If $C \in$ Pic S, then $\epsilon^*C \cdot E = 0$
(4) The canonical divisor of $\widehat{S}$ is given by $K_{\widehat{S}} = \epsilon^*K_S + E$

Let S be a surface and $\mid D \mid$ be a complete linear system of curves on S and p_1,..., p_r points of S, we can consider a sublinear system D_r consisting of divisors $D \in \mid D \mid$ which pass through the points p_1,..., p_r, usually this divisor is denoted by $\mid D - p_1 - ... - p_r \mid$.

Let $\epsilon : \widehat{S} \to S$ be the blowing up of S at the points $p_i \in S$ and $\epsilon^{-1}(p_i) = E_i$. There is a natural one to one correspondence between the elements of D_r on S and the elements of the complete linear system $\widehat{D_r} =\mid \epsilon^* D - E_1 - ... - E_r \mid$.

Recordar lo que es un divisor canónico

Recordemos que si $K = \mathrm{div}(\omega)$ es un divisor canónico en X y f es una función meromorfa global con polos acotados por K, entonces f es holomorfa y se tiene un isomorfismo:

$$H^0(X, O(K)) \cong H^0(X, \Omega^2)$$

Para cada $n \geq 1$ consideramos:

$$P_n = \dim H^0(X, O(nK)) \cong \dim H^0(X, (\Omega^2)^{\otimes n})$$

los números P_n son llamados los plurigeneros.

Consideramos la sucesión $\{P_1, P_2, ..., P_n, ...\}$ y n^κ, el menor entero κ tal que $\frac{P_n}{n^\kappa}$ es acotada se llama la dimensión de Kodaira de X. Si todos los plurigeneros son 0, entonces ponemos $\kappa = -\infty$. Para una superficie algebraica se tiene que $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$.

El grupo de Picard Pic$X$ es el grupo de divisores cocientado por el subgrupo de divisores principales. Pic$X$ puede ser identificado con el grupo fibrados en línea de X, en este caso la operación corresponde al producto tensorial.

Existe una forma de intersección que es bilineal y simétrica:

$$\mathrm{Pic}X \times \mathrm{Pic}X \to \mathbb{Z} \quad (C, D) \to C \cdot D$$

que depende solamente de las clases, es decir si $C_1 \sim C_2$ entonces $C_1 \cdot D = C_2 \cdot D$.

Si K es un divisor canónico, la autointersección $K \cdot K = K^2$ es un número que solo depende de X.

Sea $\pi : \widehat{X} \to X$ el estallido de X en un punto $p \in X$ y $E = \pi^{-1}(p) = E$ se tiene entonces:

(1) $\mathrm{Pic}\widehat{X} = \mathrm{Pic}X \oplus \mathbb{Z}$
(2) Si $C, D \in \mathrm{Pic}X$, entonces $\pi^* C \cdot \pi^* D = C \cdot D$
(3) Si $C \in \mathrm{Pic}X$, entonces $\pi^* C \cdot E = 0$
(4) El divisor canónico de $\widehat{X}$ esta dado por $K_{\widehat{X}} = \pi^* K_X + E$

Agregar más, invariantes birracionales y como cambian los otros

2.1. **Divisores.** Sea X una variedad analítica compleja de dimensión 2, una subvariedad irreducible de dimensión 1 de X será llamada un divisor primo de X. Una suma localmente finita:

$$D = \sum_i a_i D_i$$

donde cada D_i es un divisor primo y $a_i \in \mathbb{Z}$ es un divisor de X. Localmente finita significa que para cada $p \in X$ existe una vecindad abierta U_p que intersecta solamente un número finito de los D_i, en particular si X es compacta se tiene que la suma anterior se realiza sobre un número finito de indices i.

La reunión de todos los D_i se llama el soporte del divisor, si todos los a_i son positivos diremos que el divisor D es efectivo. Denotaremos por $\mathrm{Div}(X)$ el grupo abeliano de los divisores de X, es un $\mathbb{Z}$-módulo. Si X es compacta, el grupo $\mathrm{Div}(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los divisores primos de X.

Sea f una función meromorfa en X, podemos asumir que en una vecindad U de $p \in X$ $f/U = \frac{g}{h}$ con g, h funciones holomorfas, sin factores primos en común y h no identicamente nula. Si $g = g_1^{n_1} \cdot ... \cdot g_k^{n_k}$ y $h = h_1^{n_1} \cdot ... \cdot h_l^{n_l}$, denotaremos por $(g)_0$ y $(h)_\infty$ respectivamente a los divisores:

$$(g)_0 = \sum_{i=1}^{i=k} n_i\{g_i = 0\} \qquad (h)_\infty = \sum_{i=1}^{i=l} n_i\{h_i = 0\}$$

les llamaremos el divisor de los ceros y el divisor de los polos. Al divisor:

$$\mathrm{Div}(f) = (g)_0 - (h)_\infty$$

le llamaremos un divisor principal. Los divisores principales son un subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$, el grupo cociente es el grupo de clases de divisores de X y será denotado por: $\mathrm{Cl}(M)$. Dos divisores D y D' pertenecen a la misma clase si $D - D' = \mathrm{Div}(f)$

Sea D un divisor en X podemos considerar el conjunto consistente del 0 y de las funciones meromorfas f no nulas tales que $(f) + D$ es un divisor efectivo, es decir: $(f) + D \geq 0$. Este es un espacio vectorial que denotaremos por $\mathcal{L}(D)$, él es de dimensión finita si X es una variedad proyectiva.

2.2. **Clase canónica.** Sea $\{(U_i, \varphi_i)/i \in I\}$ un atlas en la variedad X un divisor en X esta dado por una familia de funciones $\{(f_i)/i \in I\}$ cada una meromorfa en U_i y que satisfagan:

(1) Las funciones (f_i) no son identicamente nulas.
(2) Para cualquier par de indices (i, j), $f_i \cdot f_j^{-1}$ y $f_j \cdot f_i^{-1}$ son holomorfas en $U_i \cap U_j$.

Sea $\dim(X) = 2$ y $p \in X$, supongamos que $p \in U_i$, $\varphi_i(p) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$, una base para el espacio cotangente a X en el punto p, denotado por T_p^*X esta dada en la carta (U_i, φ_i) por: dz_1, dz_2 donde z_1, z_2 son coordenadas locales del abierto $\varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$. Sea $\omega \in \wedge^2 T_p^*X$, la expresión de ω en la cartas locales (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) esta dada por:

$$\omega/U_i = g^i(z_1, z_2)dz_1 \wedge dz_2 \qquad \omega/U_j = g^j(w_1, w_2)dw_1 \wedge dw_2$$

en la intersección $U_i \cap U_j$ se tiene:

$$g^i(z_1, z_2) = g^j(w_1, w_2)J(\frac{z_1, z_2}{w_1, w_2})$$

el jacobiano

$$J(\frac{z_1, z_2}{w_1, w_2})$$

es holomorfo no nulo en cada intersección $U_i \cap U_j$, la forma diferencial meromorfa $\omega \in \wedge^2 T_p^*X$ determina un divisor en X, llamado el divisor de ω y denotado por (ω).

Proposition 2.1. *Sean* $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 T_p^* X$ *entonces los divisores* (ω_1) *y* (ω_2) *estan en la misma clase de* $Cl(X)$*.*

Demostración: Sean $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 T_p^* X$, $\omega_2 = f \cdot \omega_1$ con f meromorfa, entonces:

$$(\omega_2) = (f \cdot \omega_1) = (f) + (\omega_1)$$

y los divisores son equivalentes. □

Sea $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$, la clase del divisor determinado por ω es llamada la clase canónica de X y será denotada por K_X, al espacio vectorial $\mathcal{L}(K_X)$ lo denotaremos habitualmente por $H^0(X, K_X)$ y su dimensión será el género geométrico de X.

Agregar las superficies $K3$.

ON DEL PEZZO SURFACES

VGA

Abstract. We discussed informally on some surfaces introduced by Pasquele del Pezzo, marchese di Campodisola (1859-1936), these projective algebraic surfaces are some examples of Fano varieties in dimension 2.

1. Superficies de del Pezzo

Construiremos superficies de grado n en el espacio projectivo complejo $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ come ha detto del Pezzo nell'anno 1887, [4].

2. Linear system of cubics

Let V be a $(n+1)$-dimensional $\mathbb{C}$-vector space, and $\{x_0, ..., x_i, ..., x_{n+1}\}$ be a basis of V^*. We will denote by $S^d(V^*)$ the $\mathbb{C}$-vector space of homogeneous forms of degree d and by $\mathbb{P}_n(V)$ the complex n-dimensional projective space. Usually we will denote the homogeneous forms of degree d by lower case letters, and the hypersurface given the zero set of the form by the corresponding capital letter.

We will recall that the canonical divisor of $\mathbb{P}_n$ is denoted by $K_{\mathbb{P}_n}$ and $K_{\mathbb{P}_n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-(n+1)H)$. Usually when is considered as a line bundle or an invertible sheaf is denoted by $\omega_{\mathbb{P}_n}$.

We will consider mainly complex projective surfaces, therefore we will begin recalling some basic properties of the complex projective plane. Let $\mathbb{P}_2$ be the complex projective plane, its canonical class is $K_{\mathbb{P}_2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-3L)$. Its Picard group denoted by Pic $\mathbb{P}_2 \cong \mathbb{Z}$, where we can take the class of a line as a generator.

Let S be a complex projective surface Pic S is the group of invertible sheaves up to isomorphism (isomorphic to the group of divisors modulo linear equivalence). In Pic S there exist a symmetric bilinear form: Pic $S \times$ Pic $S \to \mathbb{Z}$.

As an exercise you can consider $S \cong \mathbb{P}_2$ and S a non singular quadric surface of $\mathbb{P}_3$, then describe their Picard groups.

Let S be a surface, $\epsilon : \widehat{S} \to S$ the blowing up of S at a point $p \in S$ and $\epsilon^{-1}(p) = E$ then:

(1) Pic $\widehat{S}$ = Pic $S \oplus \mathbb{Z}$
(2) If $C, D \in$ Pic S, then $\epsilon^* C \cdot \epsilon^* D = C \cdot D$
(3) If $C \in$ Pic S, then $\epsilon^* C \cdot E = 0$
(4) The canonical divisor of $\widehat{S}$ is given by $K_{\widehat{S}} = \epsilon^* K_S + E$

Let S be a surface and $\mid D \mid$ be a complete linear system of curves on S and $p_1,..., p_r$ points of S, we can consider a sublinear system D_r consisting of divisors $D \in\mid D \mid$ which pass through the points $p_1,..., p_r$, usually this divisor is denoted by $\mid D - p_1 - ... - p_r \mid$.

Let $\epsilon : \widehat{S} \to S$ be the blowing up of S at the points $p_i \in S$ and $\epsilon^{-1}(p_i) = E_i$. There is a natural one to one correspondence between the elements of D_r on S and the elements of the complete linear system $\widehat{D_r} =\mid \epsilon^* D - E_1 - ... - E_r \mid$.

Let $p_1,..., p_r$ be a set of $1 \leq r \leq 6$ different points in general position in $\mathbb{P}_2$. This means that, there is no lines passing through 3 of them and there is no conics passing through 6 of them. We will denote by $L_r =\mid 3l - p_1 - ... - p_r \mid$ the linear system of cubics passing through the points p_1,...,p_r of $\mathbb{P}_2$.

We denote by $\epsilon : \widehat{S_r} \to \mathbb{P}_2$ the blowing up of r points p_i, $\epsilon^*(l) = L$, where l is a line in $\mathbb{P}_2$, $\epsilon^*(p_i) = E_i$ and by $d = 9 - r$.

We will consider the linear system $\widehat{L_r} =\mid \epsilon^*\, 3L - E_1 - ... - E_r \mid$ on the surface $\widehat{S}_r$. Since $K_{\widehat{S}} = -\epsilon^*\, 3L + E_1 + ... + E_r$ we have that just that $\widehat{L_r} =\mid \epsilon^*\, 3L - E_1 - ... - E_r \mid = -K_{\widehat{S}}$ and $\widehat{L_r}$ is the anticanonical class on $\widehat{S}_r$.

Lemma 2.1. *The linear systems $\widehat{L_r}$ is very ample and determines an embedding $j : \widehat{S}_r \to \mathbb{P}_d$ and $j(S_r) = D_d$ is a smooth surface of degree d.*

Proof. We will assume that j is an embedding. In fact to prove this fact, we must prove that the linear system separates the points and the tangents. □

Since there are $\binom{n+d}{n}$ monomials of degree d in $n+1$ variables and the condition of passing through a point imposes one condition, then dim $\widehat{L_r} = 9-r$. We have that Pic $D_d = \mathbb{Z}^{r+1}$ with generators $L, E_1,... E_r$. The bilinear symmetric form is characterized by $L^2 = 1$, $L \cdot E_i = 0$, $E_i \cdot E_i = -1$, $1 \leq i \leq 6$ and $E_i \cdot E_j = 0$ for $i \neq j$, therefore Pic D_d is a lattice with signature $(1, 6)$.

Then the degree of D_d is $\widehat{L_r}^2 = 9 - r = d$. The hyperplane section is $H = 3L - \sum_{i=1}^{r} E_i$ and the canonical class of D_d is given by $K_{D_d} = -3L + \sum_{i=1}^{r} E_i$.

Proposition 2.1. *For any $r \in \{1, ..., 6\}$ and $d = 9 - r$ we have a smooth surface D_d of degree d in $\mathbb{P}_d$ such that*

1. *Pic $D_d = \mathbb{Z}^{r+1}$, generated by $L, E_1, ..., E_r$.*
2. *The intersection pairing on D_d is given by:$L^2 = 1$, $E_i^2 = -1$, $L \cdot E_i = 0$, $E_i \cdot E_j = 0$, for $i \neq j$.*
3. *The hyperplane section is $H = 3L - \sum_{i=1}^{d} E_i$.*
4. *The canonical class of D_d is given by $K_{D_d} = -3L + \sum_{i=1}^{6} E_i$.*

The extremal cases are $r = 1$ and $r = 6$. Also in the case $r = 0$, there is no points and if in $\mathbb{P}_2$ we denote by $(x_0 : x_1 : x_2)$ the homogeneous coordinates in the projective plane. We obtain $\mathbb{P}_2$ embedded in $\mathbb{P}_9$ by the Veronese embedding, given by the cubics:

$$(x_0 : x_1 : x_2) \to (x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0^2x_2 : x_0x_1^2 : x_0x_1x_2 : x_0x_2^2 : x_1^3, x_1^2x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3)$$

We discuss the extremal case $r = 6$. We denote by l a generic line in $\mathbb{P}_2$, $\epsilon^*l = L$, $E_i = \epsilon^{-1}(p_i)$, $i = 1, ..., 6$.

(1) Pic $D_3 = \mathbb{Z}^7$, generated by $L, E_1, ..., E_6$.
(2) The intersection pairing on D_3 is given by:$L^2 = 1$, $E_i^2 = -1$, $L \cdot E_i = 0$, $E_i \cdot E_j = 0$, for $i \neq j$.
(3) The hyperplane section is $H = 3L - \sum_{i=1}^6 E_i$.
(4) The canonical class of D_3 is given by $K_{D_3} = -3L + \sum_{i=1}^6 E_i$.
(5) Then D_3 is a smooth hypersurface of degree 3 of $\mathbb{P}_3$.

La hipersuperficie cúbica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

Los números de Betti son: $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ y $b_4 = 1$, la característica de Euler-Poincaré es $\chi(X_2^3) = 9$ (que ya habíamos obtenido), de donde $b_2 = 7$.,Como X_2^3 es racional $p_g = h_0^{2,0} = 0$.

Los números de Hodge son:

$$h^{0,0} = 1$$

$$h^{1,0} = 0 \qquad h^{0,1} = 0$$

$$h^{2,0} = 0 \qquad h^{1,1} = 7 \qquad h^{0,2} = 0$$

La forma de intersección

$$Q : H^2(X_2^3, \mathbb{R}) \times H^2(X_2^3, \mathbb{R}) \longrightarrow H^4(X_2^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

es una forma bilineal simétrica cuyo tipo será denotado por (b^+, b^-), además se tendrá $b_2 = b^+ + b^-$. Como $b^+ = 2h^{2,0} + 1$, la forma Q tiene signatura $(1, 6)$.

Se tiene $H^{2,0}(X_2^3) = H^0(X_2^3, \Omega^2) = H^0(X_2^3, K) = H^0(X_2^3, \mathcal{O}(3 - 4 \cdot H)) = \{0\}$. De (5) $H_0^{1,1}(X_2^3) = S^2((\mathbb{C}^4)^*)/J_F$ y como:

$$\dim_{\mathbb{C}} S^2((\mathbb{C}^4)^*) = 10 \qquad J_F = (x_0^2, x_1^2, x_3^2)$$

de donde $\dim H_0^{1,1}(X_2^3) = 10 - 4 = 6$.

We consider the symmetric bilinear form defined by the diagonal matrix:

$$D = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$$

gives to Pic D_3 of a structure of a lattice of signature $(1, 6)$. The canonical class corresponds to the vector $K_{D_6} = (-3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, we will denote by $-\mathbb{E}_6$ the ortogonal to $K_{D_3} = (-3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. From [2], we have:

A basis for $-\mathbb{E}_6$ is given by:

$$v_1 = e_0 - e_1 - e_2 - e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2, \quad v_3 = e_2 - e_3, \quad v_4 = e_3 - e_4, \quad v_5 = e_4 - e_5, \quad v_6 = e_5 - e_6$$

and the Cartan matrix.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

If $\dim_{\mathbb{C}} V = 4$, then $\dim_{\mathbb{C}} S^d(V^*) = 20$ and the smooth cubic hypersurfaces are in correspondence with the points of $\mathbb{P}_{19}$. Two cubics F_1 and F_2 are isomorphic if there exist an element $\varphi \in PGL(4, \mathbb{C})$ such that $\varphi^d(f_1) = f_2$. We have an action of the algebraic group $PGL(4, \mathbb{C})$ on $\mathbb{P}_{19}$, since $\dim_{\mathbb{C}} PGL(4, \mathbb{C}) = 15$ there are a 4-dimensional family of smooth cubic surfaces.

The lines contained in a smooth cubic surface are easily counted considering the exceptional curves on the del Pezzo surface.

There are 6 exceptional -1 curves represented in Pic D_3 by E_1,..., E_6.

There are 5 exceptional -1 curves passing through p_1 and one of the 5 points p_2,...,p_6, they are represented in Pic D_3 by: $L - E_1 - E_2$, $L - E_1 - E_3$, $L - E_1 - E_4$, $L - E_1 - E_5$ and $L - E_1 - E_6$.

There are 4 exceptional -1 curves passing through p_2 and one of the 4 points p_3,...,p_6, they are represented in Pic D_3 by: $L - E_2 - E_3$, $L - E_2 - E_4$, $L - E_2 - E_5$ and $L - E_2 - E_6$.

There are 3 exceptional -1 curves passing through p_3 and one of the 3 points p_4,...,p_6, they are represented in Pic D_3 by: $L - E_3 - E_4$, $L - E_3 - E_5$ and $L - E_3 - E_6$.

There are 2 exceptional -1 curves passing through p_4 and one of the 2 points p_5 and p_6, they are represented in Pic D_3 by: $L - E_4 - E_5$ and $L - E_4 - E_6$.

There is 1 exceptional -1 curves passing through the points p_5 and p_6 which is represented in Pic D_3 by: $L - E_5 - E_6$.

There are 6 exceptional -1 conics passing through 5 points and omitting one point, they are represented in Pic D_3 by:

$$2L - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6, \quad 2L - E_1 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6, \quad 2L - E_1 - E_2 - E_4 - E_5 - E_6$$

$$2L - E_1 - E_2 - E_3 - E_5 - E_6, \quad 2L - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_6, \quad 2L - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5$$

Then we have 27 lines on a cubic surface. The reader can verify that on D_4 there are 16 lines, on D_5 there are 10 lines, on D_6 there are 6 lines, on D_7 there are 3 lines and on D_8 there is 1 line.

Example 2.1. *Consider p_1, p_2, p_3 and p_4 any four point in general position in $\mathbb{P}_2$, it can be remarked that there is $\varphi \in PGL(3, \mathbb{C})$ which send the* 4 *points to the points $e_1 = (1 : 0 : 0)$, $e_2 = (0 : 1 : 0)$, $e_3 = (0 : 0 : 1)$ and $e = (1 : 1 : 1)$.*

An explicit linear system of cubics passing through the point e_1, e_2, e_3 and e is given by:

$$f_1(x_0,x_1,x_2) = x_0^2(x_1 - x_2), \quad f_2(x_0,x_1,x_2) = x_1^2(x_0 - x_2), \quad f_3(x_0,x_1,x_2) = x_2^2(x_0 - x_1)$$

$$f_4(x_0,x_1,x_2) = x_1x_2(x_1 - x_0), \quad f_5(x_0,x_1,x_2) = x_0x_2(x_0 - x_1), \quad f_6(x_0,x_1,x_2) = x_1x_2(x_2 - x_0)$$

We have $j : \widehat{S_5} \to \mathbb{P}_5$, $j(\widehat{S_5}) = D_5$ is a del Pezzo surface of degree 5 in $\mathbb{P}_5$, this surface is unique modulo isomorphisms. The surface D_5 admits the symmetric group $\mathfrak{S}_5$ as a group of automorphisms. In [3]*, we exhibit a* 1*-complex dimensional family of quadric sections (which are curves genus $g = 6$), one singular fibre is a stable curve of genus $g = 6$ whose associated weighted graph is the famous Petersen graph. This singular fibre has* 10 *rational curves corresponding to the* 4 *exceptional* -1 *curves E_i and* 6 *corresponding to inverse image of the* 6 *lines passing through* 2 *of the* 4 *points e_1,...,e_3, e. The* 15 *singular points correspond to the* 15 *edges of the Petersen graph.*

References

[1] Beauville, A. **Surfaces algébriques complexes.** Astérisque 54, Société Mathématique de France. 1978.

[2] Bourbaki, N. **Groupes et Algèbres de Lie. Chapitre 4,5 et 6.** Masson, Paris, 1981.

[3] González- Aguilera, Víctor and Rodríguez Rubí E. **A pencil in $\widehat{\mathcal{M}_6}$ with three points at the boundary.** Geometriae Dedicata. 42 , N 3, 255–265, 1992.

[4] del Pezzo, P. **Sulle superficie de n-esimo ordine immerse nello spazio a n dimensione.** Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,Vol 1, Issue 1, 241-271. December 1887.

ON THE SMOOTH CUBIC THREEFOLD

VGA

Abstract. We discussed informally on some properties of the smooth cubic threefold.

1. Some properties

Let V be a $(n+1)$-dimensional $\mathbb{C}$-vector space, and $\{x_0, ..., x_i, ..., x_{n+1}\}$ be a basis of V^*. We will denote by $S^d(V^*)$ the $\mathbb{C}$-vector space of homogeneous forms of degree d and by $\mathbb{P}_n(V)$ the complex n-dimensional projective space. Usually we will denote the homogeneous forms of degree d by lower case letters, and the hypersurface given the zero set of the form by the corresponding capital letter.

We will recall that the canonical divisor of $\mathbb{P}_n$ is denoted by $K_{\mathbb{P}_n}$ and $K_{\mathbb{P}_n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-(n+1)H)$. Usually when is considered as a line bundle or an invertible sheaf is denoted by $\omega_{\mathbb{P}_n}$.

We will consider a smooth cubic hypersurface X of $\mathbb{P}_n$, it will be called a smooth cubic threefold. Two classical examples are:

$$F : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0, \quad K : x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_0 = 0$$

Some elementary facts:

(1) Since the canonical class of a smooth hypersurface Y of degree d of $\mathbb{P}_n$ is $K_Y = \omega_Y = \mathcal{O}_Y(d-n-1)$, then $K_X = \omega_X = \mathcal{O}_X(-2)$, the canonical class is negative.
(2) Since the dimension of of the polynomials of degree d in $n+1$ variables is $\binom{n+d}{n}$, then in our case $\binom{4+3}{4} = 35$ and $\dim_{\mathbb{C}} GL(5, \mathbb{C}) = 25$. The smooth hypersurfaces of degree 3 of $\mathbb{P}_4$ depend on 10 moduli.

We recall some results that we need to describe the topology of the cubic threefold:

Proposition 1.1. *El espacio proyectivo complejo n-dimensional $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ es un espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo.*

Proposition 1.2. *Para la homología y la homotopía del espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ se tiene:*

(1) $H_i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ *si i es par,* $0 \le i \le 2n$.
(2) $H_i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \{0\}$ *si i es impar,* $0 < i < 2n$.
(3) $\pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), p) \cong \{0\}$ *es decir* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *es simplemente conexo.*
(4) *Para los números de Betti se tiene* $b_{2j} = 1$, $b_{2j-1} = 0$. *La característica de Euler es* $\chi(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i dim_{\mathbb{Z}}\, H_i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = n+1$.

Como un corolario del teorema de la sección hyperplana de Lefschetz [5], página 306.

Proposition 1.3. *Sea $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ una hipersuperficie lisa, entonces:*

$$H_k(X, \mathbb{Z}) = \{0\}, \quad k \ \ impar \quad 0 \leq k < dim_{\mathbb{C}} X$$
$$H_k(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad k \ \ par \quad 0 \leq k < dim_{\mathbb{C}} X$$

Si X es lisa del teorema de dualidad de Poincaré se tiene además:

Proposition 1.4. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una hipersuperficie lisa, entonces:*

$$H_k(X, \mathbb{Z}) = \{0\}, \quad k \ \ impar \quad 0 \leq k \leq (n-2) \quad n \leq k \leq 2n-2$$
$$H_k(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad k \ \ par \quad 0 \leq k \leq (n-2) \quad n \leq k \leq 2n-2$$

En nuestro caso particular para los números de Betti $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$, tendremos $(1, 0, 1, b_3, 1, 0, 1)$. Notar que si X es de dimensión compleja n, el único número que no conocemos es b_n.

Ahora calcularemos la característica de Euler para nuestro threefold cúbico, para ello usaremos un argumento que es válido para el caso general de un n-fold liso de grado d.

Lemma 1.1. *Sea X un threefold cúbico liso de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$, entonces $\chi(X) = -6$ y $b_3 = 10$.*

Proof. Consideramos la proyección $\pi_1 : \mathbb{P}_4(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, definida por

$$\pi_1(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$$

se tiene que $\pi_1/F : F \to \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ es un revestimiento ramificado de grado 3, el lugar de ramificación $B_2 \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ corresponde a la cúbica de Fermat $F^2 : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

Ahora consideramos la proyección $\pi_2 : \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, definida por

$$\pi_2(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0 : x_1 : x_2)$$

se tiene que $\pi_2/F^2 : F^2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ es un revestimiento ramificado de grado 3, el lugar de ramificación $B_1 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ corresponde a la cúbica de Fermat $F^1 : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$, como ella es una curva de género 1, $\chi(F^1) = 0$.

Tenemos que $\chi(F^2) = 3 \cdot (\chi(\mathbb{P}_2(\mathbb{C})) - \chi(F^1)) + \chi(F^1) = 3(3-0) + 0 = 9$, entonces.

$$\chi(F) = 3 \cdot (\chi(\mathbb{P}_3(\mathbb{C})) - \chi(F^2)) + \chi(F^2) = 3(4-9) + 0 = -6$$

de donde $-6 = 4 - b_3$ y $b_3 = 10$. □

Now we need to have some knowledge on the cohomology of our cubic threefold, then we turn to Kähler structures and Hodge decomposition.

Estructura de Kähler

Una variedad analítica compleja M es una variedad Hermitiana si su fibrado tangente $T_M^{1,0}$ admite un producto escalar hermitiano:

$$<,>: T_{M,x}^{1,0} \otimes \overline{T_{M,x}^{1,0}} \to \mathbb{C}$$

que depende suavemente de M. En coordenadas locales este producto escalar hermitiano esta dado por:

$$ds^2 = \sum_{i,j} h_{ij}(z) dz_i \otimes \overline{dz_j}$$

donde $h_{ij}(z) = \overline{h_{ji}(z)}$.

La parte real de ds^2 determina un producto escalar euclidiano en el espacio tangente real subyacente (es decir una métrica Riemanniana), la parte imaginaria de ds^2 determina una 2-forma alternada $\omega = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(ds^2)$, llamada la forma asociada a la métrica Hermitiana.

Mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se puede encontrar formas $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \in T^{1,0}_{M,x}$ de manera que localmente la métrica ds^2 se puede expresar:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \otimes \overline{\Phi_j}$$

si $\Phi_j = \alpha_j + i\beta_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j) + i \sum_{j=1}^{n} (-\alpha_j \otimes \beta_j + \beta_j \otimes \alpha_j)$$

la forma asociada

$$\omega = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(ds^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \wedge \beta_j = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} \Phi_j \wedge \overline{\Phi_j}$$

la métrica $ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \otimes \overline{\Phi_j}$ puede recuperarse a partir de la forma ω asociada.

Con más precisión, dada una $(1,1)$-forma real:

$$\omega = \frac{i}{2}\sum h_{pq}(z) dz_p \wedge \overline{dz_q}$$

ella define una métrica Hermitiana:

$$ds^2 = \sum h_{pq}(z) dz_p \otimes \overline{dz_q}$$

cuando la matriz hermitiana $H(z) = (h_{pq}(z))$ es positiva definida.

Se puede notar que $\frac{1}{n!}\omega^n$ es la forma de volumen dv para la variedad Riemaniana M con métrica $\mathrm{Re}(ds^2)$.

Proposition 1.5. *El espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ posee una métrica Hermitiana ds^2 de manera que la $(1,1)$-forma ω asociada es cerrada ($d\omega = 0$).*

Como una variedad analítica compleja M es una variedad de Kähler si tiene una métrica hermitiana, tal que la $(1,1)$-forma asociada es cerrada, entonces $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ es una variedad de Kähler.

Cualquier hipersuperficie lisa de grado d de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ es una variedad de Kähler, en particular nuestro threefold cúbico liso.

Estructuras de Hodge

Proposition 1.6. *Sea M una variedad de Kähler compacta entonces se tiene una descomposición de Hodge para su cohomología con coeficientes complejos:*

$$H^k(M,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

donde $H^{p,q}(M) = \overline{H^{q,p}(M)}$

Acá se tiene que $H^{p,q}(M) \cong H^q(M, \Omega^p_M)$.

Las dimensiones $h^{p,q}(M) = \dim H^{p,q}(M) = \dim H^q(M, \Omega^p_M)$ son llamados los números de Hodge y estan relacionados con los números de Betti mediante: $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$, en particular los números de Betti impares son pares.

Estos números se pueden agrupar en un diagrama llamado diamante de Hodge.

En particular se tiene:

$$h^{p,q}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = 0, \quad p \neq q \qquad h^{p,q}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = 1, \quad p = q$$

Example 1.1. *Sea C una curva algebraica compleja lisa de género $g \leq 2$, el diamante de Hodge en este caso será:*

$$\begin{matrix} & H^{0,0} & \\ H^{1,0} & & H^{0,1} \\ & H^{2,2} & \end{matrix}$$

Hipersuperficie cúbica tres dimensional

Sea X una hypersuperficie cúbica lisa de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$, entonces $\chi(X^3_3) = -6$ y $b_3 = 10$.

Para determinar los números de Hodge de X haremos un intermezzo, sobre el ideal Jacobiano. Sea S el anillo de polinomios $S \cong \bigoplus_l H^0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), O_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}(l))$. El ideal Jacobiano de f denotado por $\mathcal{J}_f = \oplus_l \mathcal{J}_l$, es el ideal homogéneo generado por las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 0, ..., n$.

Sea X una hipersuperficie lisa de grado d de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$), determinada por una forma homogénea f de grado d. Del cálculo de residuos de Griffiths o de [5] se tiene:

Lemma 1.2. *Se tiene un isomorfismo natural $H^{n+1-r,r-1}(X) \cong R_f^{rd-n-2}$, donde $R^l_f := S^l/\mathcal{J}^l_f$ es la l-ésima componente del anillo Jacobiano $R_f := S/\mathcal{J}_f$*

Aprovechamos de ilustrar con el siguente cálculo, sea X la hipersuperficie de Fermat F, entonces $\mathcal{J}_f = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ y en $H^{n+1-r,r-1}(F)$ ponemos $n = 3$ y $r = 3$, obtenemos que $H^{1,2}(F) \cong R^4_f := S^4/\mathcal{J}^4_f$. Es fácil ver que una base para $H^{1,2}(F,\mathbb{C})$ es:

$$\{x_1x_2x_3x_4, x_0x_2x_3x_4, x_0x_1x_3x_4, x_0x_1x_2x_4, x_0x_1x_2x_3\}$$

entonces $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,2}(X,\mathbb{C}) := h^{1,2} = 5$. Notar que este tipo de cálculo se puede realizar para otras hipersuperficies.

Los números de Hodge de X son:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0}=1 & & & \\ & & h^{1,0}=0 & & h^{0,1}=0 & & \\ & h^{2,0}=0 & & h^{1,1}=1 & & h^{0,2}=0 & \\ h^{3,0}=0 & & h^{2,1}=5 & & h^{1,2}=5 & & h^{0,3}=0 \end{array}$$

Notar que

$$H^3(X,\mathbb{C}) = H^{2,1}(X) \oplus H^{1,2}(X) := H^1(X,\Omega_X^2) \oplus H^2(X,\Omega_X^1)$$

notar que como $H_3(X,\mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{10}$ entonces $H^{2,1}/H_3(X,\mathbb{Z})$ es un toro complejo 5-dimensional, en el cual se puede definir una polarización principal.

La Jacobiana intermedia $\mathcal{J}(X)$ es una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión 5.

Un intermedio, sobre el ideal Jacobiano. Sea X una hipersuperficie lisa de grado d de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$), determinada por una forma homogénea f de grado d.

Sea S el anillo de polinomios $S \cong \bigoplus_l H^0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), O_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}(l))$. El ideal Jacobiano de f denotado por $\mathcal{J}_f = \oplus_l \mathcal{J}_l$, es el ideal homogéneo generado por las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 0, ..., n$.

Algunos aspectos:

(1) Rectas en X conducen a la variedad de Fano de X, ella es una superficie.
(2) No racionalidad de X, Recordemos que una variedad de dimensión compleja n es racional si ella es biracionalmente isomorfa a $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Una cúbica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ (curva elítica) no es racional. Una superficie cúbica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ es racional. La hipersuperficie cúbica lisa de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ no es racional, como había conjeturado [2]. Para X la componente de Griffiths del $\mathcal{J}(X)$ es no trivial, si está componente no es trivial entonces X no puede ser racional.
(3) Hay un teorema de Torelli para X.
(4) Automorfismos de X.

References

[1] Clemens, H.C. and Griffiths, P.A **The Intermediate Jacobian of the Cubic Threefold.** Annals of Maths. 2ndServ, Vol 95, N2, 281-356, 1972.

[2] Fano, G. **Sul sistema de ∞^2 di rette contenuto in una varieta cubica generale dello spazio a quattro dimensione.** Atti Accad. Torino, Vol 39, 778–792, 1904.

[3] González- Aguilera, V. and Liendo, A. **On the order of an automorphism of a smooth hypersurface.** Israel Journal of Maths, No. 197, 29–49, 2013.

[4] Tjurin, A. N. **The geometry of the Fano surface of a non singular cubic $F \subset \mathbb{P}^4$ and Torelli theorem for Fano surfaces and cubics** Math.USSR. Izvestija. Vol 5. 517-546, 1971.

[5] Voisin, C. **Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.** Panoramas et Synthèses, no. 10. Société Mathématique de France, 2002.