Geometría algebraica (Semana 4): "Variedades alg, funciones regulares y componentes irreducibles y prod. de variedades"

Recuerdo: Una var. alg. afín

$$(X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$$

$\mathcal{U}$: cerrado alg; $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$: haz de func. regulares

Una var. alg $(X, \mathcal{O}_X)$ es:

- X esp. top. noetheriano
- $\forall x \in X$, $\exists\, \mathcal{U}_x \ni x$ tq $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ es una var. alg afín.

Ejemplo: $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es una var. alg pero <u>no</u> es afín.

- Demostraremos que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\underbrace{\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}}_{X}) = k[x,y]$

Sea $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(X)$

$X = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$ e.g.

$$\Rightarrow \varphi|_{\{x \neq 0\}} = \frac{f}{x^m}$$

$$\varphi|_{\{y \neq 0\}} = \frac{g}{y^m}$$

Para ciertos $n, m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Podemos asumir que $x \nmid f$, $y \nmid g$.

Tenemos que en $\{x \neq 0\} \cap \{y \neq 0\}$:

$$f \cdot y^m = g \cdot x^n$$

Si $m > 0 \Rightarrow y \mid g \cdot x^m \Rightarrow y \mid g$ ↯

$\Rightarrow \varphi = f = g \in k[x,y]$.

Luego: $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(X) = k[x,y]$.

⚠ En una var. alg. afín: $\{x \in X\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} m_x \text{ ideal max.} \\ \text{de } \mathcal{O}_X(X) \end{matrix} \right\}$

$m_{(0,0)} = (x,y) \in k[x,y]$, pero $(0,0) \notin X$.

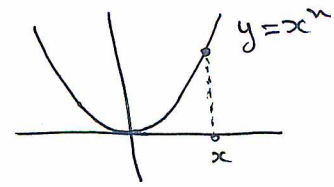
$\Rightarrow X$ no es afín.

Recuerdo: $f: V \subseteq \mathbb{A}^n \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$, V, W var. alg afines.

f es <u>regular</u> si f es la restricción a V de una ~~aplicación~~ aplicación polinomial.

<u>Ejemplo</u>:

$V(x^n - y) \subseteq \mathbb{A}^2$, $\quad f: V(x^n - y) \longrightarrow \mathbb{A}^1$ es regular
$$(x, y) \longmapsto x$$



y $f^{-1}: \mathbb{A}^1 \longrightarrow V(x^n - y)$ es regular.
$$t \longmapsto (t, t^n)$$

$\Rightarrow f$ es un <u>isomorfismo</u>:

<u>Def</u>: $V \cong W$ si $\exists f: V \to W$ regular, biyectiva y $f^{-1}: W \to V$ es regular.

Si f es un isomorfismo $\mathcal{O}(V) \cong \mathcal{O}(W)$. En el ejemplo:

$$f^*: \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathcal{O}(V(x^n - y))$$
$$\overset{\shortparallel}{k[T]} \longrightarrow \overset{\shortparallel}{\frac{k[X,Y]}{\langle X^n - Y \rangle}} = k[\overline{X}, \overline{Y}]$$
$$T \longmapsto f^*(T) = T \circ f = \overline{X}.$$

<u>Obs</u>: $f^*: \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$
$$u \longmapsto u \circ f$$

<u>Ejemplo</u> (Tarea): $V(x^2 + y^2 - 1) \cong V(x^2 - y^2 - 1)$ (Recuerdo: $k = \overline{k}$!)

<u>Ejemplo</u>: $\varphi: \mathbb{A}^1 \longrightarrow V(x^2 - y^3)$ es una función regular, biyectiva.
$$t \longmapsto (t^3, t^2)$$

Pero: $\mathbb{A}^1 \not\cong V(x^2 - y^3)$.

- φ es regular ✓
- $\varphi^{-1}: V(x^2 - y^3) \longrightarrow \mathbb{A}^1$
$$\begin{cases} (x, y) \longmapsto \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ (0,0) \longmapsto 0 & (y = 0 \Rightarrow x = 0) \end{cases}$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi(t) = \varphi^{-1}(t^3, t^2) = \frac{t^3}{t^2} = t$$

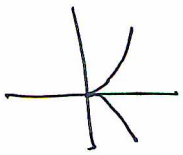
Sabemos: $V \cong W \iff \mathcal{O}(V) \cong \mathcal{O}(W)$.

$$\varphi^*: \frac{k[X,Y]}{\langle X^2 - Y^3 \rangle} \longrightarrow k[T]$$
$$\overline{X} \longmapsto \varphi^*(\overline{X}) = T^3$$
$$\overline{Y} \longmapsto \varphi^*(\overline{Y}) = T^2$$

$\left(f^*: \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V),\ u \longmapsto u \circ f \right)$

$\Rightarrow \varphi^*\left(\frac{k[X,Y]}{(X^2-Y^3)}\right) = k[T^2,T^3] \subsetneq k[T]$

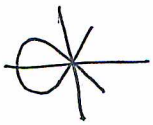
$\Rightarrow \varphi^*$ no es un isom. $\Rightarrow V \cong W$ $\qquad x^2 = y^3$



(cúspide)

<u>Ejemplo</u> (Tarea):

$X = \mathbb{A}^1$, $V := V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2$



(nodo)

$X \longrightarrow V$

$t \longmapsto (t^2-1, t(t^2-1))$

es un morfismo, pero no es biyectiva.

<u>Producto de variedades</u> (afines)

En una categoría ({objetos, morfismos entre objetos}) un <u>producto</u> de dos objetos X, Y es un objeto Z (que llamaremos $X \times Y$) y funciones $Z \xrightarrow{f} X$, $Z \xrightarrow{g} Y$ ("proyecciones") tq:

$\forall$ objeto S y cada par de morfismos $u: S \to X$, $v: S \to Y$ se tiene que $\exists!$ $w: S \to Z = X \times Y$ tq $u = f \circ w$, $v = g \circ w$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "w"] \arrow[rr, bend left, "u"] \arrow[rr, bend right, "v"'] & X \times Y \arrow[r, "f"] \arrow[r, "g"'] & X \;\; Y \end{tikzcd}$$

<u>factorización</u>

<u>Ejercicio</u>: Si Z existe en una categoría, entonces es único.

<u>Prop</u>: En la categoría de variedades alg. afines, el producto finito existe (ie, X, Y var alg afín $\Rightarrow X \times Y$ es una var alg afín).

<u>Dem</u>: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ var alg afines.

$X = V(p_1, \dots, p_N)$

$Y = V(q_1, \dots, q_M)$

Definimos $Z = V(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_M) \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ con funciones

$pr_1 : Z \longrightarrow \mathbb{A}^n$ proyecciones (regulares).

$pr_2 : Z \longrightarrow \mathbb{A}^m$

Si S var alg afín,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & X \subseteq \mathbb{A}^n \\ & Y \subseteq \mathbb{A}^m \end{tikzcd}$$

Luego, $u(s) = (u_1(s), \dots, u_N(s))$ y $v(s) = (v_1(s), \dots, v_M(s))$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $w(s) := (u_1(s), \dots, u_N(s), v_1(s), \dots, v_M(s))$, $w: S \to Z$ es única.

Llamaremos $Z := X \times Y$

Tarea] Ver que la top. en $X \times Y$ no es la top. producto (e.g. $X = Y = \mathbb{A}^1$).

Lema: X, Y var alg afines

$$\varphi : \mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X \times Y)$$
$$\sum_{\text{finita}} a_{ij} f_i \otimes g_j \longmapsto \sum a_{ij} f_i g_j$$

Dem: φ es inyectiva: Sup que $\sum a_{ij} f_i g_j = 0$.

Sup que $\exists x \in X$, $i \in I$, tq $f_i(x) \neq 0$.

$\Rightarrow \sum_j a_{ij} f_i(x) g_j : Y \to k$ es la función nula

$\Rightarrow \sum_j a_{ij} f_i(x) g_j = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \ \forall j \Rightarrow \sum a_{ij} f_i \otimes g_j = 0$.

φ es sobreyectiva:

$$\begin{tikzcd} k[X] \otimes k[Y] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{sobre}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & k[X, Y] \arrow[d, "\text{sobre}"] \\ \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \arrow[r] & \mathcal{O}(X \times Y) \end{tikzcd}$$

$X = (x_1, \dots, x_n)$
$Y = (y_1, \dots, y_m)$

$\Rightarrow \varphi$ es sobreyectiva ■

Componentes irreducibles

Def: Un esp. top. X es irreducible si $X = F_1 \cup F_2$ con F_1, F_2 cerrados $\Rightarrow X = F_1$ o $X = F_2$.

Prop: Si X es una variedad alg. afín, X es irred $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}(X)$ no tiene divisores de cero.

Recuerdo: $f \neq 0$ div. de cero si $\exists g \neq 0$ tq $fg = 0$.

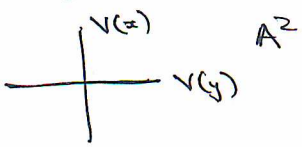
Dem: Si $\mathcal{O}(X)$ tiene div. de cero $f, g \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\| \\ V(0)}}{X} = \underbrace{V(f) \cup V(g)}_{\substack{\| \\ V(fg)}}$$

■

Ej: $X = V(xy) \subseteq \mathbb{A}^2 \Rightarrow \mathcal{O}(X) = \dfrac{k[x,y]}{\langle xy \rangle}$, $f = \overline{X}$, $g = \overline{Y}$

$fg = \overline{XY} = 0$



Ejercicio 1) Si $f: X \to Y$ continua. Entonces X irred $\Rightarrow f(X)$ irred.

2) La unión de dos subconj abiertos irred de X con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ es irred.

3) Si X, Y son var. alg afines irred $\Rightarrow X \times Y$ irred.

Ejemplo: 1) $\mathbb{A}^n$ es irreducible (k infinito)

2) $X = V(f_1, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$ con $I = (f_1, \dots, f_m) = \sqrt{I}$

$\Rightarrow \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I \cong k[x_1, \dots, x_n]/I$

no tiene div. de cero $\Leftrightarrow I$ es primo.

e.g. $I = (xy) \subseteq k[x,y]$ no es primo.

Luego: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ideales} \\ \text{primos de } k[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{subvar. cerradas} \\ \text{de } \mathbb{A}^n \text{ irreducible} \end{array} \right\}$

Def: X esp. top. Una <u>componente</u> irreducible de X es un subconjunto cerrado irreducible, maximal respecto a la inclusión.

Prop: Si X es top. noetheriano, entonces existen finitas componentes irred. $F_1, \dots, F_N$ tq

1) $X = F_1 \cup \dots \cup F_N$

2) Cada subconjunto cerrado irred de X está contenido en algún F_i.

Idea: Sea $A = \{ F \mid F$ cerrado en X tq F no tiene finitas comp. irred $\}$

Probaremos que $A = \emptyset$.

Si $A \neq \emptyset$: $\exists F \in A$ minimo resp a la inclusión

$\Rightarrow F = F_1 \cup F_2$, $F_1 \subsetneq F$ & $F_2 \subsetneq F$

F minimal $\Rightarrow F_1, F_2 \notin A$ (luego F_1, F_2 son unión finita de comp irred) ↯ ∎

Ejemplo: 1) $C_t = \{ xy = t \} \subseteq \mathbb{A}^2$ ($t \in k$) familia de cerrados.

C_0 reducible

C_t irred si $t \neq 0$.

2) Sea $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2^2$, $f_2 = y^2 + z^2 - 1$

Tarea: Dem que las comp. irred de $V(f_1, f_2)$ son: (en $\mathbb{A}^3$)

$V_1 = V(x - \sqrt{3}, y^2 + z^2 - 1)$ y $V_2 = (x + \sqrt{3}, y^2 + z^2 - 1)$ (ie, $V(f_1, f_2) = V_1 \cup V_2$).