Variedades Abelianas

Semana 9

Sebastián Fuentes Olguín

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

3 de noviembre de 2023

§0. Variedades analíticas

Recuerdo (haces)

Sea X un espacio topológico. Un haz de $\mathbb{C}$–álgebras $\mathscr{F}$ sobre X es:

1. para cada $U \subset X$ abierto una $\mathbb{C}$–álgebra $\mathscr{F}(U)$.
2. para cada inclusión de abiertos $V \subset U$ un morfismo de $\mathbb{C}$–álgebras $r_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ tal que:
    - si $W \subset V \subset U$ son inclusiones de abiertos en X, entonces $r_{UW} = r_{VW} \circ r_{UV}$.
    - si $(U_i)_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de U y tenemos $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$, existe un único $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$, donde $s|_V := r_{UV}(s)$.

Ejemplo principal

Si $X = \mathbb{C}^n$, denotamos por $\mathscr{O}_X$ el haz de funciones holomorfas, i.e., para cada abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, $\mathscr{O}_X(U) := \{ f : U \to \mathbb{C}, f \text{ es holomorfa } \}$.

Definición

Una variedad analítica es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ (i.e., $\mathscr{O}_X$ es un haz de $\mathbb{C}$–álgebras sobre el espacio topológico X) tal que

1. X es Hausdorff.
2. para todo $x \in X$ existe un abierto $x \in U \subset X$ tal que $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ es isomorfo a

$$V' = \{x \in V \subset \mathbb{C}^n : f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}$$

para cierto abierto $V \subset \mathbb{C}^n$ y ciertas funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(V)$.

Definición (subvariedad)

Sea X una variedad compleja. Una subvariedad $Y \subset X$ un subconjunto cerrado que es a su vez una variedad con su estructura inducida (esto es, un subconjunto cerrado localmente isomorfo a conjuntos de ceros de funciones holomorfas).

Definición (variedad irreducible)

Una variedad analítica X se dice *irreducible* si no existen $V_1, V_2 \subset X$ subvariedades tales que $V_1 \cup V_2 = X$.

Teorema ([2])

Si X, Y son variedades complejas, $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa y $V \subset X$ una variedad analítica tal que $f|_V$ es un propia, entonces $f(V)$ es una subvariedad analítica de Y.

Puntos singulares y dimensión

Definición (punto singular)

Sea X variedad analítica. Un punto se dice suave (o también liso) $x \in X$ si existe un abierto $x \in U \subset X$ isomorfo a un abierto de $\mathbb{C}^n$ (i.e., no hay ecuaciones). Un punto se dice singular si no es suave. El conjunto de puntos suaves se denota X_{reg}.

Teorema

Una variedad analítica X es irreducible si y sólo si X_{reg} es conexo.

Definición (dimensión)

Sea X variedad analítica irreducible. Definimos su dimensión como la dimensión de X_{reg} como variedad compleja.

§1. Subvariedades de un toro complejo

Como en muchas áreas de la matemática tiene sentido preguntarse por objetos minimales con cierta propiedad, en este caso buscamos dar sentido a la expresión "el subtoro más grande que contiene a un conjunto dado". Para ello tenemos el siguiente resultado.

Lema (Lema 1.1 en [1])

Todo grupo de Lie complejo, compacto y conexo es un toro complejo.

Demostración. Sea X grupo de Lie con las características del enunciado. Demostremos en primer lugar que X es abeliano. Para ello consideramos el morfismo:

$$\Phi : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$$

Sea $U \subset X$ vecindad abierta de 1. Para cada $x \in X$ existen vecindades abiertas V_x, W_x de x y de 1 respectivamente, tales que $\Phi(V_x, W_x) \subset U$, dado que $\Phi(x, 1) = 1 \in U$ y Φ es continuo.

Como X es compacto, es cubierto por una cantidad finita de conjuntos V_x. Definir W como la intersección de los conjuntos W_x correspondientes a los V_x considerados. Se tiene entonces que $\Phi(X,W) \subset U$ y el Teorema de Liouville implica que $\Phi(X,W) = 1$ pues las funciones holomorfas en variedades compactas son constantes y $\Phi(1,x) = 1$ para todo $x \in W$. Dado que W es un abierto no vacío y X es convexo, se tiene que X es abeliano pues W es un generador de X.

Para concluir la demostración se requieren algunos hechos de Teoría de Grupos de Lie. El hecho que X sea abeliano implica que su álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ lo es, y más aún, como en este caso X es conexo, la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{a} \to X$ es sobreyectiva.

Está aplicación es inyectiva en una vecindad del origen, así que por lo tanto su kernel es uns subgrupo discreto de $\mathfrak{a}$, y por lo tanto

$$\Gamma := \ker(\exp) \cong \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_k$$

para ciertos vectores $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{a}$. Por lo tanto $X \cong (S^1)^k \times \mathbb{R}^{2\dim(X)-k}$ y X es compacto si y solo si $k = 2\dim(X)$. $\square$

Durante todo lo que sigue X será un toro complejo de dimensión g.

Definición

Sea $A \subset X$ subconjunto. Definimos el subtoro de X generado por A como la intersección de todos los subtoros de X que contienen a la componente conexa de 0 en $A - A$. Lo denotamos por $\langle A \rangle$. La idea es que $\langle A \rangle$ es la intersección de los subtoros tal que una traslación contiene A.

Notación

La notación $A - A$ significa

$$A - A := A + (-A) = \{x + y : x \in A, (-y) \in A\}$$

Propiedades de $\langle A \rangle$

1. Es claro que $\langle A \rangle = \langle \overline{A} \rangle$ pues un subtoro de X es cerrado.
2. Si $A, B \subset X$ entonces
$$\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$
3. Sea A una subvariedad irreducible de X. Notemos que
$$A_m := \underbrace{(A - A) + \cdots + (A - A)}_{m \text{ veces}}$$
son también subvariedades irreducibles y que forma una cadena creciente, i.e., $A_m \subset A_{m+1}$. Un argumento de dimensión implica que existe m_0 tal que $A_m = A_{m_0}$ para $m \geq m_0$. Este hecho implica que $\langle A \rangle = A_{m_0}$.
4. Si A no es irreducible y $A_1, \ldots, A_r$ son sus componentes irreducibles, los puntos anteriores dan que $\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle + \cdots + \langle A_r \rangle$ y luego $\langle A \rangle = A_m$ para m suficientemente grande.

El teorema de Sard en el contexto de la geometría diferencial afirma que el conjunto de valores críticos de una función diferenciable tiene medida cero. El mismo fenómeno ocurre en el contexto de variedades analíticas.

Teorema (Suavidad genérica)

Sea $f : X \to Y$ función holomorfa con X variedad compleja, Y analítica. Para todo $r \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$X_r := \{x \in X \text{ tal que } \operatorname{rg}(d_x f) \leq r\} \subseteq X$$

es una subvariedad. En particular, existe un abierto denso $U \subset Y_{\mathrm{reg}}$ donde f tiene diferencial sobreyectivo.

Puntos generales

Cuando una propiedad geométrica depende de puntos en una variedad, si esta propiedad se cumple en el complemento de una subvariedad (i.e., en un abierto denso) decimos que se cumple en un *punto general*.

Lema

Sea X un toro complejo, A una subvariedad de X y U un abierto denso de A_{reg}. El subespacio vectorial $T_0\langle A\rangle$ de T_0X es generado por $T_0(A-a)$ para $a\in U$.

Demostración. Suponemos que A es conexo. Por la discusión anterior podemos considerar un entero m tal que

$$\sigma : A^{2m} \to \langle A\rangle, \quad (a_1,\dots,a_{2m}) \mapsto a_1 - a_2 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m}$$

sea sobreyectiva. En este caso el diferencial de σ en un punto general de A^{2m} será sobreyectivo, y de hecho esta aplicación se identifica con:

$$\begin{array}{ccc} T_0(A-a_1)\oplus\cdots\oplus T_0(A-a_{2m}) & \longrightarrow & T_0\langle A\rangle \\ (t_1,\dots,t_{2m}) & \longmapsto & t_1 - t_2 + \cdots + t_{2m-1} - t_{2m} \end{array}$$

□

Lema

Sea X un toro complejo y A una subvariedad irreducible de X. Sea K un subtoro de X tal que, para a general (regular) en A, tenemos que $T_0 K \subset T_0(A - a)$. Entonces $A + K = A$.

Demostración. Consideremos la proyección $p : X \twoheadrightarrow X/K$ y su restricción $A \twoheadrightarrow p(A)$. En un punto general $a \in A$ su diferencial es sobreyectivo y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dim p(A) &= \dim A - \dim\left(T_a A \cap \operatorname{Ker} T_a p\right)\\ &= \dim A - \dim\left(T_a A \cap T_a(K + a)\right)\\ &= \dim A - \dim K\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración pues $p(A)$ posee dimensión maximal y por tanto $A + K \subset A$. $\square$

Lema

Sea X un toro complejo, A una variedad analítica compacta y G una subvariedad irreducible de $X \times A$. Sea $u : G \to A$ la proyección en la segunda coordenada. Existe un subtoro K de X tal que $\langle u^{-1}(a) \rangle = K$ para a general en $u(G)$.

Demostración. Consideremos $a_0 \in u(G)$ tal que la dimensión del toro $K = \langle u^{-1}(a_0) \rangle$ es minimal. Sea $p : X \to X/K$ la proyección al cociente y definamos

$$G' := (p, \mathrm{id})(G), \quad u' : G' \subset (X/K) \times A \to u(G), \quad (x, y) \mapsto y$$

Por construcción la fibra $(u')^{-1}(a_0)$ es finita, y por continuidad de la dimensión de las fibras, u' tiene fibra finita en un punto general $a \in u(G)$. Esto significa que $\langle u^{-1}(a) \rangle \subset K$. Dado que a_0 se escogió de forma minimal se tiene que $\langle u^{-1}(a) \rangle = K$. $\square$

§2. Intersección de subvariedades

Consideremos X un toro complejo y A, B subvariedades irreducibles. El objetivo es comprender cómo estas subvariedades se intersectan.

Proposición

Sea X un toro complejo, A, B subvariedades irreducibles. Para $x \in X$ general se tienen dos alternativas

1. $A \cap (B + x) = \varnothing$.
2. $\dim(A \cap (B + x)) = \dim A + \dim B - \dim X$.

Demostración. Definimos

$$\delta : A \times B \to X, \quad (a, b) \mapsto a - b$$

Es claro que para $x \in X, \delta^{-1}(x) \cong A \cap (B + x)$. Si δ no es sobreyectivo en x estamos en la primera situación. Si la fibra en x es no vacía, su dimensión es $\dim(A \times B) - \dim X$. $\square$

Teorema

Sea X un toro complejo y A y B subvariedades irreducibles de X. Sea K el subtoro más grande de X tal que $A+B+K=A+B$ y $p:X\to X/K$ la sobreyección canónica. Se tiene

$$\dim(p(A)+p(B))=\dim p(A)+\dim p(B).$$

Demostración. Reemplazando X por X/K podemos suponer que $K=0$. Para $x\in A+B$ definimos $F_x:=A+(x-B)$. Definimos el automorfismo:

$$\begin{array}{rccc}\varphi: X\times X & \longrightarrow & X\times X \\ (x,y) & \longmapsto & (x,x+y)\end{array}$$

y denotamos $G:=\varphi(A\times B)$.

La proyección en la segunda coordenada induce un morfismo $u : G \to A + B$ con fibra $u^{-1}(x) = F_x \times \{x\} \cong F_x$. El lema anterior da que existe un subtoro K' de X tal que $K = \langle F_{\rangle}$ para $x \in A + B$ general.

Si $x \in A + B$ es un punto suave, notemos que para $a \in F_x$ se tiene que $F_x - a \subset A + B - x$. Esto nos da una inclusión de espacios vectoriales $T_0(F_x - a) \subset T_0(A + B - x)$. Un lema anterior da que

$$T_0 K' = T_0 \langle F_x \rangle \subset T_0(A + B - x)$$

y otro lema permite obtener $A + B = A + B + K'$. Por hipótesis $K' = 0$, lo cual de hecho implica que F_x es un conjunto finito, de donde deducimos que u es un morfismo con fibra general finita y por tanto $\dim(A \times B) = \dim(A) + \dim(B)$. $\square$

Corolario

Sea X un toro complejo y A y B subvariedades irreducibles de X. A no intersecta a una traslación general de B si y solo si existe un toro cociente Y de X tal que

$$\dim p(A) + \dim p(B) < \dim Y,$$

donde $p : X \to Y$ es la proyección al cociente.

Demostración. ($\Leftarrow$) Si existe tal cociente Y, la Proposición previa implica que para $x \in X$ general $p(A) \cap (p(B) + p(x)) = \emptyset$, y por lo tanto A no intersecta a $B + x$.
($\Rightarrow$) Si A no intersecta una traslación general de B tendremos que $A + (-B) \neq X$ y de acuerdo al Teorema anterior X/K verifica la condición requerida. $\square$

Observación

Este corolario nos dice que en un toro simple (i.e., que no contiene subtoros no triviales) dos subvariedades cuya suma de dimensiones sobrepasa la dimensión del toro tienen intersección no vacía.

Definición

Decimos que una subvariedad irreducible A de un toro complejo X es no degenerada si para todo subtoro K de X, tenemos

$$\dim(A+K) = \min(\dim A + \dim K, \dim X)$$

De forma equivalente, A no es degenerada si para cada toro Y de X, tenemos $\dim p(A) = \min(\dim A, \dim Y)$, donde $p : X \to Y$ es la proyección al cociente.

Ejemplos

1. Una curva (subvariedad de dimensión 1) irreducible en un toro es no degenerada si y solo si lo genera.
2. Una hipersuperficie irreducible D es no degenerada si y solo si $\mathscr{O}_X(D)$ es amplio.
3. Toda subvariedad de un toro simple es no degenerada.

3

Corolario

Sea X un toro complejo y A, B subvariedades irreducibles de X.

1. Si A es no degenerado, tenemos
$$\dim(A+B) = \min(\dim A + \dim B, \dim X).$$
2. Si A y B son no degenerados, $A+B$ tampoco es degenerado.

Demostración Si A es no degenerado, entonces se sigue que:

$$\begin{aligned}
\dim(A+B) &= \dim(p(A)+p(B)) + \dim K \\
&= \dim p(A) + \dim p(B) + \dim K \\
&= \min(\dim A, \dim(X/K)) + \dim p(B) + \dim K \\
&\geq \min(\dim A, \dim(X/K)) + \max(\dim B, \dim K) \\
&\geq \min(\dim A + \dim B, \dim(X/K) + \dim K)
\end{aligned}$$

Si B también es no degenerada, utilizando el punto 1. obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dim(A+B) &= \dim(p(A)+p(B)) + \dim K \\
&= \dim p(A) + \dim p(B) + \dim K \\
&= \min(\dim A, \dim(X/K)) + \dim p(B) + \dim K \\
&\geq \min(\dim A, \dim(X/K)) + \max(\dim B, \dim K) \\
&\geq \min(\dim A + \dim B, \dim(X/K) + \dim K)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario

Sea X una variedad abeliana y sea A una subvariedad irreducible de X. Entonces A es no degenerada si y solo si A intersecta cualquier subvariedad de X de dimensión $\geq \dim X - \dim A$.

Demostración. Si A es no degenerada y B una subvariedad irreducible de X de dimensión $\dim B \geq \dim X - \dim A$ el Corolario anterior da la conclusión. Supongamos que A es degenerada. Sea Y un toro cociente de X tal que $p(A) \neq Y$ donde $p : X \to Y$ es la proyección al cociente y $d = \dim p(A) < \dim A$. Podemos considerar $d+1$ hipersuperficies de Y tales que su intersección B es una subvariedad de codimensión $d+1$ que no intersecta $p(A)$. Por lo tanto $A \cap p^{-1}(B) = \varnothing$ y luego

$$\dim p^{-1}(B) = \dim B + \dim X - \dim Y = \dim X - d - 1 \geq \dim X - \dim A$$

$\square$

§3. Teorema de conexidad y grupo fundamental

Corolario

Sea X un toro complejo de $\dim(X) = g$ y A una subvariedad irreducible de X tal que para todo toro cociente Y de X se tiene que $\dim p(A) \geq \frac{1}{2} \dim Y$, donde $p : X \to Y$ es la proyeccion al cociente. El morfismo $\pi_1(i) : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ inducido por la inclusión de A en X es sobreyectivo.

Demostración. Sabemos $\pi_1(X)$ es un grupo abeliano libre, pues es conocido que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Probemos en primer lugar que la conclusión es equivalente a probar que la composición

$$\pi_1(A) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/n\pi_1(X)$$

a la cual denotaremos φ_n, es sobreyectiva para todo $n > 0$.

En efecto, dado que $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, se tiene que $\operatorname{coker}(\pi_1(i)) = \mathbb{Z}^{2g}/\Gamma$ donde $\Gamma := \pi_1(i)(\pi_1(A))$ y por teorema de la base adaptada:

$$\operatorname{coker}(\pi_1(i)) \cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{2g-r}$$

Luego la imagen de la composición corresponde a:

$$\operatorname{Im}(\varphi_n) = \langle [d_1]_n \rangle \times \cdots \times \langle [d_r]_n \rangle$$

El hecho que φ_n sea sobreyectiva para todo $n > 0$ significa que $r = 2g$ y que $d_1, \ldots, d_{2g}$ son coprimos con todo $n > 0$, i.e., $d_1 = \cdots = d_{2g} = 1$ lo cual implica que $\operatorname{coker}(\pi_1(i)) = \{0\}$.
Dado un cubrimiento conexo $\pi : E \to X$, se puede probar que su grupo fundamental viene dado por un cociente G de $\pi_1(X)$ y el hecho que $\pi^{-1}(A)$ sea conexo es equivalente al hecho que la composición:

$$\pi_1(A) \to \pi_1(X) \twoheadrightarrow G$$

El hecho anterior implica entonces que para concluir es suficiente mostrar que, si consideramos la isogenia $\mathbf{n} : X \to X$ (multiplicación por n) entonces $\mathbf{n}^{-1}(A)$ es conexo. Si A_1, A_2 son componentes irreducibles de $\mathbf{n}^{-1}(A)$, si consideramos un toro cociente Y de X y la proyección $p : X \twoheadrightarrow Y$ entonces

$$\dim p(A_1) + \dim p(A_2) = 2 \dim p(A) \geq \dim Y$$

Un corolario anterior implica que A_1 y A_2 se intersectan y por lo tanto $\mathbf{n}^{-1}(A)$ es irreducible. $\square$

Definición

Sea X toro complejo. Decimos que un par (A, B) de subvariedades irreducibles de X es no degenerado si para todo toro cociente Y de X se tiene que

1. $\dim p(A) + \dim B > \dim X$ si $p(A) \neq Y$.
2. $\dim A + \dim p(B) > \dim X$ si $p(B) \neq Y$.

donde $p : X \twoheadrightarrow Y$ es la proyección al cociente.

El par (A, B) es no degenerado si se tiene alguna de las siguientes situaciones:

1. A y B son ambos no degenerados y $\dim A + \dim B > \dim X$.
2. $A = X$ y B genera X.

Teorema de conexidad

El siguiente teorema (cuya demostración no será presentada por ser demasiado técnica y extensa) permitirá demostrar un resultado muy satisfactorio sobre el grupo fundamental de subvariedades.

Teorema

Sean A y B variedades compactas irreducibles normales, X un toro complejo y $u : A \to X, v : B \to X$ aplicaciones holomorfas tales que el par $(u(A), v(B))$ es no degenerado. Existe una isogenia $w : \widetilde{X} \to x$ y factorizaciones $u : A \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{X} \xrightarrow{w} X$ et $v : B \xrightarrow{\widetilde{v}} \widetilde{X} \xrightarrow{w} X$ tales que:

1. el producto fibrado $A \times_{\tilde{X}} B$ es conexo.
2. la sucesión

$$\pi_1\left(A \times_{\tilde{X}} B\right) \longrightarrow \pi_1(A) \times \pi_1(B) \xrightarrow{\pi_1(\widetilde{u})-\pi_1(\widetilde{v})} \pi_1(\tilde{X}) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Corolario

Sea X un toro complejo y A sea una subvariedad normal irreducible de X tal que, para cada toro cociente Y de X tal que $p(A) \neq Y$ se tiene que:

$$\dim A + \dim p(A) \geq \dim X$$

donde $p : X \to Y$ es la proyección al cociente. El morfismo $\pi_1(i) : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ inducido por la inclusión de A en X es biyectivo.

Demostración. Utilizamos el teorema tomando u, v ambas como la inclusión $i : A \hookrightarrow X$. Ya probamos anteriormente que $\pi_1(i)$ es sobreyetivo, y esto implica que la isogenia w dada por el teorema de conexidad es de hecho un isomorfismo, y por lo tanto el producto fibrado $A \times_X A$ es simplemente la diagonal de $A \times A$.

Así, la sucesión exacta del teorema se convierte en:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1(A) & \longrightarrow & \pi_1(A)\times\pi_1(A) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \longrightarrow & 0 \\
t & \longmapsto & (t,t) & & & & \\
 & & (t,t') & \longmapsto & \pi_1(i)(t-t') & &
\end{array}$$

que significa exactamente que $\pi_1(i)$ es inyectiva. $\square$

Los primeros resultados relacionados con el grupo fundamental de subvariedades como los que acabamos de ver datan de 1968 por Alexander Grothendieck. Más adelante problemas de este tipo fueron estudiados por W. Fulton y J. Hansen, y luego por P. Deligne y R. Lazarsfeld. Todos los resultados obtenidos apuntan a la siguiente conjetura.

Conjetura

Sea X un toro complejo y A sea una subvariedad irreducible de X que es una intersección localmente completa y no degenerada. Entonces

$$\pi_j(A) \simeq \pi_j(X) \quad \text{para} \quad j \leq 2\dim A - \dim X$$

§4. Aplicación de Gauss

Sea X un toro complejo de $\dim X = n$ y A subvariedad irreducible de X de dimensión $\dim A = d$. En cada punto suave $a \in A$ podemos considerar el espacio tangente de $A - a$ en 0, el cual naturalmente está dentro de $T_0 X$. Esta asociación define una aplicación holomorfa

$$\mathscr{G}_A : A_{\mathrm{reg}} \to G(d, T_0 X)$$

donde $G(d, T_0 X)$ es la Grassmanniana de subespacios vectoriales de dimensión d de $T_0 X$. Se puede probar que $G(d, T_0 X)$ es una variedad compleja de dimensión $d(n-d)$, y que viene dotado de un fibrado en rectas natural $\mathscr{O}_{G(d,T_0X)}(1)$ cuya fibra en un punto $V \in G(d, T_0 X)$ corresponde a $\bigwedge^d V^*$. Más aún, el pullback $\mathscr{G}_A^* \mathscr{O}_{G(d,T_0X)}(1)$ es isomorfo al fibrado en rectas de $(n,0)$ formas diferenciales en A_{reg}, conocido como *fibrado en rectas canónico*.

Proposición

Sea X un toro complejo y A una subvariedad irreducible de X de dimensión d. Sea K el subtoro más grande de X tal que $A + K = A$ y $p : X \to X/K$ la proyección al cociente. Entonces se tiene que:

1. la aplicación de Gauss se factoriza en:

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{G}_A : A_{\mathsf{reg}} \xrightarrow{p} \!\!\!\!\rightarrow A_{\mathsf{reg}}/K \xrightarrow{\mathscr{G}_{p(A)}} & G(d - \dim K, T_0(X/K)) & \hookrightarrow & G(d, T_0X) \\ & T & & (T_0p)^{-1}(T) \end{array}$$

2. la fibra general no vacía de $\mathscr{G}_{p(A)}$ es finita.

Teorema

Sea X toro complejo y A una subvariedad irreducible de X. Si F es una subvariedad irreducible contenida en una fibra de $\mathscr{G}_A$ entonces $A + \langle F \rangle = A$.

Todo lo anterior nos permite llegar a una conclusión bastante satisfactoria. Si A es una subvariedad suave de un toro complejo X la cual no es invariante por traslaciones por ningún subtoro, entonces la aplicación de Gauss asociada es un *morfismo finito*. Se puede probar utilizando métodos cohomologicos que el pullback de un fibrado en rectas amplio por un morfismo finito es amplio, y por lo tanto el fibrado canónico ω_A de una subvariedad con las características anteriores es amplio.