Móduli de Variedades Abelianas

Juan Andrés Fuenzalida

Seminario de Variedades Abelianas

Viernes, 20 de Octubre de 2023

Espacios de Móduli

- ¿Qué es un espacio de Móduli?
- ¿Por qué nos interesan?
- ¿Cómo se construyen?

Fijemos $X = V/\Gamma$ un toro complejo con ω una polarización.

A ω le podemos asociar $\Delta = (d_1, \ldots, d_g)$ enteros positivos divisibles sucesivamente entre sí $(d_1|d_2|...)$. A Δ le llamaremos el *tipo* de la polarización.

Sabemos (condiciones de Riemann) que una variedad abeliana de tipo Δ es isomorfa a un cociente $X_\tau = \mathbb{C}^g/\Gamma_\tau$, donde el retículo $\Gamma_\tau = \tau\mathbb{Z}^g \oplus \Delta\mathbb{Z}^g$, y τ es una matriz simétrica de parte imaginaria definida positiva de $g \times g$ $(\in \mathcal{H}_g)$.

Y sabemos también que dos variedades X_τ y $X_{\tau'}$ son isomorfas ssi existe u automorfismo de $\mathbb{C}^g$ tal que $u(\Gamma_{\tau'}) = \Gamma_\tau$.

El grupo simpléctico y su acción

Sea A la matriz de u en la base canónica y N la matriz (entera) en las bases de $\Gamma_{\tau'}$ y Γ_τ correspondiente a las columnas de las matrices $(\tau' \ \Delta)$ y $(\tau \ \Delta)$ respectivamente. Sea σ_Δ el automorfismo

$$P \mapsto \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}^{-1} P \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

de $\mathsf{GL}_{2g}(\mathbb{Q})$. Por comodidad, consideraremos $M = \sigma_\Delta(N)$, la matriz de u en las bases B', B correspondientes a las columnas de las matrices $(\tau' \ I_g)$ y $(\tau \ I_g)$ respec. Tenemos entonces la relación

$$A(\tau' \ I_g) = (\tau \ I_g)M$$

Si $M^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relación se traduce en

$$\tau' = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$$

El grupo simpléctico y su acción

Si u induce también un isomorfismo entre variedades abelianas *polarizadas*, respeta las formas alternadas de matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$, por lo que

$$M \in \mathsf{Sp}_{2g}(\mathbb{Q}) = \{M \in \mathsf{GL}_{2g} | MGM^t = J\}$$

Con toda esta notación, dos variedades abelianas polarizadas X_τ y $X_{\tau'}$ son isomorfas ssi existe un elemento $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ del grupo

$$G_\Delta = \sigma_\Delta(\mathcal{M}_{2g}(\mathbb{Z})) \cap \mathsf{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})$$

tal que $\tau' = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$. El isomorfismo entre X_τ y $X_{\tau'}$ está definido por

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^g/\tau\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g & \longrightarrow & \mathbf{C}^g/\tau'\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g \\ z & \longmapsto & z' = {}^t(c\tau + d)^{-1} z \\ \tau p + q & \longmapsto & \tau' p' + q' \,, \end{array}$$

donde $(p' \; q') = (P^{-1})^t (p \; q)$

Proposición

La relación $(P, \tau) \mapsto P \cdot \tau$ *define una acción por la izquierda del grupo* $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ *en* $\mathcal{H}_g$

Gracias al siguiente teorema de Cartan, podemos ver que el conjunto de clases de isomorfismo de variedades abelianas polarizadas de tipo Δ está en biyección con el cociente $G_\Delta \backslash \mathcal{H}_g$.

Recordemos que la acción de un grupo G sobre un espacio topológico se dice propiamente discontinua si para todo compacto K el conjunto $\{g \in G | gK \cap K \neq \varnothing\}$ es finito.

Theorem

Sea X un espacio analítico, G un grupo cuya acción es propiamente discontinua sobre X por transformaciones biholomorfas, y $\rho : X \to X/G$ la proyección al cociente. El haz de anillos $\mathcal{O}$ sobre X/G definido para todo abierto por

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to C | f \circ \rho \text{ es holomorfa en } \rho^{-1}(U)\}$$

define una estructura de espacio analítico sobre X/G.

El espacio resultante puede poseer singularidades, sin embargo, si la acción es libre, el cociente sí es una variedad compleja.

Proposición

Todo subgrupo discreto de $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ actúa de forma propiamente discontinua sobre $\mathcal{H}_g$

Con esto probamos entonces que el espacio de clases de isomorfismos de variedades abelianas polarizadas de tipo Δ, $G_\Delta \backslash \mathcal{H}_g$, posee una estructura de espacio analítico de la misma dimensión que $\mathcal{H}_g$. Llamaremos a este espacio, el *espacio de móduli de las variedades abelianas polarizadas de tipo* Δ, denotado por $\mathcal{A}_{g,\Delta}$, o $\mathcal{A}_g$ cuando Δ es la identidad.

Variedad compleja?

El estabilizador de un punto $G_{\Delta,\tau}$ es isomorfo al grupo de automorfismos en la variedad X_τ que conservan la polarización $\mathrm{Aut}(X_\tau, \omega_\tau)$. Este siempre contiene a $-\mathrm{Id}_{X_\tau}$, sin embargo la acción de $G_\Delta/\{\pm I_{2g}\}$ no es libre: existen en toda dimensión variedades abelianas polarizadas cuyo grupo de automorfismos contienen estrictamente a $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

La vecindad de un punto que corresponde a una variedad abeliana polarizada (X_τ, ω_τ) es isomorfa a un cociente de una vecindad U de τ por la acción de su estabilizador. Esta acción se puede linealizar a través del espacio tangente.

Por un teorema de Chevalley, $\mathcal{A}_{g,\Delta}$ es suave en una vecindad de la clase de τ ssi el estabilizador de τ es generado por elementos que son la identidad en un hiperplano (pseudo-reflexiones). Como el automorfismo A asociado a la acción del estabilizador en la vecindad es de orden finito, se puede diagonalizar con valores propios $\lambda|, \ldots, \lambda_g$, y la acción (linealizada) M tiene valores propios $\lambda_j \lambda_k$ para $1 \leq j \leq k \leq g$. La única posibilidad, si $A \neq \pm I_g$, para que el espacio propio del valor propio 1 contenga un hiperplano es que $g = 2$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, esto lleva al resultado siguiente

Theorem

Los puntos suaves de $\mathcal{A}_{g,\Delta}$ para $g \geq 3$ corresponden exactamente a las variedades abelianas polarizadas cuyo grupo de automorfismos es $\{\pm Id\}$.

Esto implica que $\mathcal{A}_{g,\Delta}$ nunca es una variedad compleja.

Es fácil ver que para $g < 3$ el teorema es falso. Los puntos suaves de $\mathcal{A}_{2,(1,p)}$ corresponden a las superficies producto de dos curvas elípticas. Sin embargo su grupo de automorfismos es de orden 4.

A pesar de fallar en ser una variedad compleja, sí podemos dotar a $\mathcal{A}_{,}$ de estructura de variedad algebraica cuasiproyectiva.

En un ejemplo de la semana 4 vimos que, si $a \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g$, $\theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(\cdot, \tau)$ es una función theta para el retículo $\tau\mathbb{Z}^g \oplus \Delta\mathbb{Z}^g$ y se asocia a un fibrado $L(H, \alpha)$ sobre X_τ al que llamamos L_τ. Tenemos que $\theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \theta\begin{pmatrix} a+m \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^g$, por lo que los

$$\left(\theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(\cdot, \tau)\right)_{a \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g}$$

forman una base del espacio de funciones theta clásicas asociadas a L_p.

Notamos que, por el teorema de Lefschetz, si $d_1 \geq 2$, entonces para todo τ y todo z existe un a en $\Delta^{-1}\mathbb{Z}^g$ tal que $\theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(\cdot, \tau) \neq 0$; y, para todo entero m que divide a Δ, haciendo $\alpha_m(\tau p + \Delta q) = (-1)^{p^t \Delta q/m}$, el par $(H/m, \alpha_m)$ es el tipo de un fibrado en rectas M_τ sobre X_τ tal que $M_\tau^{\otimes m} = L_\tau$, al que se le asocian las funciones theta $z \mapsto \theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(z/m, \tau/m)^m$ para $a \in m\Delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$.

Definición

Sea G un subgrupo de Sp$_{2g}(\mathbb{Q})$, y k un entero. Llamamos formas modulares de peso k en G a las funciones holomorfas $f : \mathcal{H}_g \to \mathbb{C}$ tales que, para todo $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$,

$$f(M \cdot \tau) = \det(c\tau + d)^k f(\tau)$$

para todo τ en $\mathcal{H}_g$.

También se pueden admitir pesos racionales, pidiendo que exista una raíz del determinante que cumpla la relación. Con esto, vemos que podemos construir formas modulares con las funciones theta de Riemann.

Theorem

Si $4|d_1$, existe un subgrupo normal G^0_Δ de índice finito en G_Δ tal que para todo $a \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g$ la función

$$\tau \mapsto \theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(0,\tau)$$

es una forma modular de peso $1/2$ en G^0_Δ.

El G^0_Δ del teorema es subgrupo de $G_\Delta(\Delta)$. Estos subgrupos son discretos, lo que permite que $\mathcal{A}_{g,\Delta}(\Delta) = G_\Delta(\Delta)\backslash\mathcal{H}_g$ y $\mathcal{A}^0_{g,\Delta} = G^0_\Delta\backslash\mathcal{H}_g$ tengan estructura de espacio analítico. Estos espacios parametrizan variedades abelianas polarizados con estructura adicional. Esta estructura corresponde a isomorfismos simplécticos, que en el caso de $\mathcal{A}^0_{g,\Delta}$, este isomorfismo además preserva cierta forma cuadrática.

Así, existen aplicaciones holomorfas con fibras finitas
$\mathcal{A}^0_{g,\Delta} \to \mathcal{A}_{g,\Delta}(\Delta) \to \mathcal{A}_{g,\Delta}$ que corresponden a olvidar estructura.

Cuando $4|d_1$, lo que hemos visto hasta ahora permite definir la aplicación holomorfa

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{A}^0_{g,\Delta} &\to \mathbb{P}^{d_1 \cdots d_g - 1}\\ \tau &\mapsto \left(\theta\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(\cdot, \tau)\right)_{a \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}\end{aligned}$$

Que resulta ser

Theorem

Sea d_1 par mayor a 4. La aplicación holomorfa

$$\psi : \mathcal{A}^0_{g,\Delta} \to \mathbb{P}^{d_1 \cdots d_g - 1}$$

definida arriba es una incrustación; induce un isomorfismo de $\mathcal{A}^0_{g,\Delta}$ a una variedad cuasi-proyectiva.