Variedades Abelianas Valparaíso

Mateo Hidalgo

Semana 7

Índice

Secciones de Fibrados en Rectas

Teorema

Sea X un toro complejo y L un fibrado en rectas en X . Sea $\bar{X}_L$ el toro complejo $X/K(L)^0$ (cf. teorema 4.2) y p la sobreyección canónica $X \to \bar{X}_L$. O bien $H^0(X, L) = 0$, o existe un fibrado en rectas amplio $\bar{L}$ en $\bar{X}_L$ tal que p induce isomorfismos

$$p^*\bar{L} \simeq L \quad \text{y} \quad H^0\left(\bar{X}_L, \bar{L}\right) \simeq H^0(X, L)$$

Demostración. Escribamos $X = V/\Gamma$ y denotemos N el kernel de $c_1(L)$; tenemos $K(L)^0 = N/\Gamma \cap N$ (teorema 4.2). Podemos suponer que L tiene una sección distinta de cero. Le corresponde (V.2.1 p. 53) una función theta normalizada de la forma de Riemann $c_1(L)$, que por la proposición IV 1.8 p. pag. 40 proviene de una función theta no degenerada en $\bar{X}_L$ cuyo divisor asociado denotamos $\bar{D}$.

Secciones de Fibrados en Rectas

El fibrado en rectas $\bar{L} = \mathcal{O}_{\bar{X}_L}(\bar{D})$ es amplio (tiene una sección distinta de cero y su primera clase de Chern no es degenerada) y satisface $L = p^*\bar{L}$. Como la aplicación $p^* : \operatorname{Pic}\left(\bar{X}_L\right) \to \operatorname{Pic}(X)$ es inyectiva (usar cor.5.8. p .61 y prop. 4.6 b)), $\bar{L}$ no depende de la elección de la sección de L. Por lo tanto, el mapa inyectivo $H^0\left(\bar{X}_L, \bar{L}\right) \to H^0(X, L)$ es sobreyectivo. $\square$

Secciones de Fibrados en Rectas

Sean L y M fibrados en rectas en un Toro Complejo X de dimensión g. La expresión $pf(tc_1(L) + c_1(M))$ es un polinomio de grado a lo más g en t que denotamos $P_{L,M}(t)$

Lema

Si L es positivo y M es amplio, el polinomio $P_{L,M}$ es de grado $\dim(\bar{X}_L)$, a coeficientes positivos, a raices reales estrictamente negativas y de coeficiente principal más grande que $\dim(H^0(X,L))$.

Demostración. Notemos $\omega = c_1(M)$. Como la forma hermitiana H asociada a ω es definida positiva, existe una base compleja $\mathscr{B}$ de V en la que esta matriz es la identidad, mientras que la matriz D de la forma hermitiana (positiva) asociada con $c_1(L)$ es diagonal, con coeficientes diagonales positivos $a_1, \ldots, a_g$ de los cuales exactamente $\dim K(L)^0$ son cero. Dado que $\omega(x, iy) = \operatorname{Re} H(x, y)$, la matriz de ω en la base real $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$ de V es $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$, mientras que el de $c_1(L)$ es $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Si P es la matriz que pasa de una base de Γ a la base $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$, tenemos

$$P_{L,M}(t) = \operatorname{pf}\left(tc_1(L) + c_1(M)\right) = |\det(P)| \prod_{a_j \neq 0} \left(ta_j + 1\right).$$

El grado de $P_{L,M}(t)$ es de hecho $g - \dim K(L)^0$.

Queda por mostrar la cota inferior para el coeficiente principal de $P_{L,M}$. Por supuesto, podemos suponer que L tiene una sección distinta de cero. Sea n un número entero positivo; se tiene

$$
\begin{aligned}
P_{L,M}(n) &= \dim H^0\left(X, L^{\otimes n} \otimes M\right) && \text{por Riemann- Roch y 3,6} \\
&\geq \dim H^0\left(X, L^{\otimes n}\right) && \text{porque } M \text{ tiene una sección no nula} \\
&= \dim H^0\left(\bar{X}_L, \bar{L}^{\otimes n}\right) && \text{por ejercicio.VI.4a) y th.5.1} \\
&= \mathrm{pf}\left(nc_1(\bar{L})\right) && \text{por Riemann-Roch} \\
&= n^{\dim \bar{X}_L} \mathrm{pf}\left(c_1(\bar{L})\right) && \\
&= n^{\dim \bar{X}_L} \dim H^0\left(\bar{X}_L, \bar{L}\right) && \\
&= n^{\dim \bar{X}_L} \dim H^0(X, L), &&
\end{aligned}
$$

lo que completa la prueba del lema. $\square$

Secciones de Fibrados en Rectas

Proposición

Sea X un toro complejo y L y M dos fibrados en rectas positivas tales que $L \otimes M$ es amplio y $\dim K(L)^0 + \dim K(M)^0 < \dim X$. Se tiene

$$\dim H^0(X, L \otimes M) \geq \dim H^0(X, L) + \dim H^0(X, M).$$

Las hipótesis de la proposición se verifican, por ejemplo, si L y M son amplios y X es distinto de cero.

Demostración. La expresión $Q(a,b) = \operatorname{pf}(ac_1(L) + bc_1(M))$ es un polinomio homogéneo de grado $g = \dim X$. El lema 5.3 muestra que para cualquier entero estrictamente positivo b,

$$P_{L^b, L\otimes M^b}(a) = Q(ab+1, b) = b^g Q\left(a + \frac{1}{b}, 1\right)$$

es un polinomio en a con coeficientes positivos; por lo tanto, $Q(a,1)$ es también un polinomio en a a coeficientes positivos. Su grado y su coeficiente principal son los mismos que los de $Q(a+1,1) = P_{L,L\otimes M}(a)$, dado por el lema $(g - \dim K(L)^0)$.
podemos deducir

$$Q(a,b) = \lambda a^{g-\dim K(L)^{\mathbf{0}}} b^{\dim K(L)^{\mathbf{0}}} + \cdots + \mu a^{\dim K(M)^{\mathbf{0}}} b^{g-\dim K(M)^{\mathbf{0}}},$$

con $\lambda \geq \dim H^0(X,L)$. También obtenemos $\mu \geq \dim H^0(X,M)$ intercambiando los roles de L y M. Si $g - \dim K(L)^0 > \dim K(M)^0$, tenemos $Q(1,1) \geq \lambda + \mu$ y concluimos. $\square$

Variedades Abelianas

Definición

Llamamos *polarización en un toro complejo* X a una forma entera de Kähler en X. Llamamos *variedad abeliana* a un toro complejo en el que existe una polarización y a una *variedad abeliana polarizada* a un par (X, ω), donde X es una variedad abeliana y ω una polarización en X.

Reformulación

Podemos enunciar las observaciones de 3.6 de la siguiente manera:
Para que un toro complejo sea una variedad abeliana, es necesario y suficiente que admita una incrustación holomorfa en un espacio proyectivo.

Un teorema de Chow ([GH, p. 167]) dice que cualquier subvariedad compleja compacta de un espacio proyectivo es una subvariedad algebraica proyectiva, es decir que está definida por ecuaciones polinómicas (homogéneas). Por lo tanto, una variedad abeliana es un grupo algebraico (el mismo teorema de Chow implica que las operaciones de grupo son $\ll$ aplicaciones regulares $\gg$) que es una variedad proyectiva.

Una polarización ω en un toro complejo $X = V/\Gamma$ es una forma $\mathbb{R}$-bilineal alternada en V, entera en Γ que satisface $\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$ y $\omega(x, ix) > 0$ para todos los x distintos de cero y todos los y en V (*cf*. III 5.3 p. 35). También podemos verla como la primera clase Chern de un fibrado en rectas amplio L en X, o nuevamente, en 4.3, como el dato de un fibrado en rectas amplio en X definido módulo isomorfismo. El morfismo $\varphi_L : X \to \hat{X}$, su kernel $K(L)$ y la forma e^L no depende de ω (cf 4.3 y 4.4); también los denotaremos $\varphi_\omega, K(\omega)$ y e^ω. De la misma manera, la raíz cuadrada del grado de φ_L sólo depende de ω (este es su pfaffiano por el 4.2); lo denotamos $\deg(\omega)$.

Sea X una variedad abeliana; todo toro complejo isogénico a X es una variedad abeliana. En particular, el toro dual $\hat{X}$ es una variedad abeliana llamada variedad abeliana dual de X. Cada subtoro de X es una variedad abeliana (la restricción al subtoro de un fibrado en rectas amplio en X sigue siendo amplio) ; cada toro cociente de X es una variedad abeliana (es isogénico a un subtoro de $\hat{X}$).

Sean (X, ω_X) y (Y, ω_Y) variedades abelianas polarizadas; las clases enteras de Kähler ω_X y ω_Y permiten definir una clase entera de Kähler en $X \times Y$ que denotamos $\omega_X \times \omega_Y$ y que llamamos polarización del producto.
Denotamos por $pr_X : X \times Y \to X$ y $pr_Y : X \times Y \to Y$ las proyecciones; si L_X (resp. L_Y) es un fibrado en rectas amplio en X (resp. por Y) que representa la polarización, la fibra en rectas $pr_X^* L_X \otimes pr_Y^* L_Y$ (que denotaremos a veces $L_X \boxtimes L_Y$) es amplio en $X \times Y$ y representa la polarización producto.

Un caso especial importante de polarización es aquel donde la forma ω es *unimodular* en el grillado Γ (es decir su pfaffiano es 1); decimos que la polarización es principal y que (X, ω) es una variedad abeliana principalmente polarizada. El morfismo asociado $\varphi_\omega : X \to \hat{X}$ es entonces un isomorfismo (th. 4.2); si L es un fibrado en rectas de primera clase de Chern ω, el teorema de Riemann-Roch implica que el sistema lineal $|L|$ tiene un solo elemento, que a menudo denotamos Θ, y al que llamamos un *divisor theta*. Sólo está definido por la polarización módulo traslación (*cf*,4,3); para que $\Theta_x = \Theta$, es necesario y suficiente que x sea cero.

Variedades Abelianas

Proposición

Cualquier variedad abeliana es isogénica a una variedad abeliana principalmente polarizada. Más precisamente, para cualquier fibrado en rectas amplio L en una variedad abeliana X, existe una variedad abeliana Y, un fibrado en rectas amplio M que define una polarización principal en Y y una isogenia $u : X \to Y$ tal que $L \simeq u^* M$.

Demostración. Sea $X = V/\Gamma$ una variedad abeliana y ω una polarización en X. Tomemos una base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ en la que la matriz de ω es como en la proposición 1.1. Sea Γ' el grillado de V generada por $\gamma_1/d_1, \ldots, \gamma_g/d_g, \gamma_{g+1}, \ldots, \gamma_{2g}$. La forma de Kähler ω es entera unimodular en Γ' por lo tanto define una polarización principal en el toro $Y = V/\Gamma'$. La sobreyección canónica $X \to Y$ es una isogenia. Sea L un fibrado en rectas en X con primera clase de Chern ω; sea M un fibrado en rectas en Y de primera clase de Chern ω. Los fibrados en rectas L y $u^* M$ tienen la misma clase Chern; como son amplios, existe (*cf*. 4.3) un punto x de X tal que $L \simeq \tau_x^* (u^* M)$. Como $\tau_x^* (u^* M) \simeq u^* \left(\tau_{u(x)}^* M \right)$, esto prueba la proposición. $\square$

Teorema

Sea X una variedad abeliana y Y una subvariedad abeliana de X. Existe una subvariedad abeliana Z de X tal que $Y \cap Z$ es finita y $Y + Z = X$. En otras palabras, la aplicación de suma $Y \times Z \to X$ es una isogenia.

Demostración Sea L un fibrado en rectas amplio en X y $\varphi_L : X \to \hat{X}$ la isogenia asociado. Sea $\iota : Y \to X$ la inclusion, $\hat{\iota} : \hat{X} \to \hat{Y}$ su dual, y Z el sub-toro $\left(\varphi_L^{-1}(\operatorname{Ker}\hat{\iota})\right)^0$ de X. El compuesto $\hat{\iota} \circ \varphi_L : X \to \hat{Y}$ es cero en Z; por otro lado, su restricción a Y es la aplicación $\varphi_{\iota^* L}$ (ejerc.VI.3), que es una isogenia ya que $\iota^* L$ es amplio en Y. Deducimos que $Y \cap Z$ está contenido en el kernel de $\varphi_{\iota^* L}$, por lo tanto es finito; el mapa de suma $Y \times Z \to X$ es entonces de kernel finito. Es una isogenia ya que $\dim Z = \dim(\operatorname{Ker}\hat{\iota})^0 = \dim X - \dim Y$ (prop.4.6a)). $\square$

Reducibilidad de Poincaré

Decimos que un toro complejo es simple si no contiene ningún subtoro más que él mismo y $\{0\}$. Un toro muy general es simple (ejercicio.I.2, p.99); un toro cuyo anillo de endomorfismos es Z es simple. El teorema de Poincaré implica que cualquier variedad abeliana X es isogénica para un producto $X_1^{n_1} \times \cdots \times X_r^{n_r}$, donde $X_1, \ldots, X_r$ son variedades abelianas simples por pares no isogénicas. Por supuesto, esta descomposición no es única. Por otro lado, los X_j solo están determinados hasta la isogenia y los n_j son únicos.

Algunos toros complejos se pueden escribir de varias maneras diferentes como productos de subtoros simples. Por otro lado, si tomamos en cuenta las polarizaciones, existe unicidad, como lo muestra el corolario del siguiente teorema

Teorema

Sea (X,ω) una variedad abeliana polarizada que contiene subvariedades abelianas X_1, X_2, Y_1 y Y_2 tales que

$$(X,\omega) = \left(X_1, \omega|_{X_1}\right) \times \left(X_2, \omega|_{X_2}\right) = \left(Y_1, \omega|_{Y_1}\right) \times \left(Y_2, \omega|_{Y_2}\right).$$

Para $i = 1{,}2$, entonces tenemos

$$\left(X_i, \omega|_{X_i}\right) \simeq \left(X_i \cap Y_1, \omega|_{X_i \cap Y_1}\right) \times \left(X_i \cap Y_2, \omega|_{X_i \cap Y_2}\right).$$

Demostración. Sea $Z_{ij} = (X_i \cap Y_j)^0$ y sea Z la subvariedad abeliana $Z_{11} \times Z_{12} \times Z_{21} \times Z_{22}$ de X. Sea K el kernel de la aplicación $\widehat{X} \to \widehat{Z}$ y K_i sea el kernel de la aplicación $\widehat{X}_i \to \widehat{Z}_{i1} \times \widehat{Z}_{i2}$. Por hipótesis, $\varphi_\omega : X_1 \times X_2 \to \widehat{X}_1 \times \widehat{X}_2$ no es otro que $\varphi_{\omega|}$. Además, si

$$X' = \varphi_\omega^{-1}(K)^0 \quad \text{et} \quad X_i' = \varphi_{\omega|X_i}^{-1}(K_i)^0 ,$$

se tiene

$$(X', \omega|_{X'}) = \left(X_1', \omega|_{X_1'}\right) \times \left(X_2', \omega|_{X_2'}\right) .$$

Demostremos de manera análoga que tenemos una descomposición

$$(X', \omega|_{X'}) = \left(Y_1', \omega|_{Y_1'}\right) \times \left(Y_2', \omega|_{Y_2'}\right) ,$$

donde Y_j' es una sub-variedad abeliana de Y_j tal que $X_i' \cap Y_j'$ sea finita. Esto entrega en particular que X_1', X_2', Y_1' y Y_2' tienen la misma dimensión m. Esto implica demostrar que m es cero, ya que, siendo Z de dimensión $\dim X - \dim X'$, entonces tendremos $Z = X$.

Descomposición de una variedad abeliana polarizada

Se tiene

$$\omega|_{X_i'} = \omega_{i1} + \omega_{i2},$$

con ω_{ij} es la preimagen de $\omega|_{Y_j'}$ por la aplicación

$p_{ij} : X_i' \subset X' = Y_1' \times Y_2' \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} Y_j'$ (el kernel es finito, de suerte que ω_{ij} es una polarización). Supongamos m no nulo; se tiene de la proposición 5.4

$$\deg\left(\omega|_{X_i'}\right) \geq \deg\left(\omega_{i1}\right) + \deg\left(\omega_{i2}\right),$$

de manera que

$$\begin{aligned}\deg\left(\omega|_{X'}\right) &= \deg\left(\omega|_{X_1'}\right)\deg\left(\omega|_{X_2'}\right)\\ &\geq \left(\deg\left(\omega_{11}\right) + \deg\left(\omega_{12}\right)\right)\left(\deg\left(\omega_{21}\right) + \deg\left(\omega_{22}\right)\right).\end{aligned}$$

Descomposición de una variedad abeliana polarizada

Como ω_{ij} es la imagen inversa de $\omega|_{Y'_j}$ por la isogenia p_{ij}, tenemos $\deg\left(\omega|_{Y'_j}\right) \leq \deg(\omega_{ij})$ para todos i y j por el Corolario 4.7, de modo que

$$\deg(\omega|_{X'}) = \deg\left(\omega|_{Y'_{1)}}\right)\deg\left(\omega|_{Y'_2}\right) \leq \deg(\omega_{11})\deg(\omega_{22})\,.$$

Dado que todos los grados son estrictamente positivos, esto contradice (23) y completa la demostración del teorema. $\square$

Diremos que una variedad abeliana polarizada es *indescomponibles* si no está producida por variedades abelianas polarizadas de dimensión estrictamente inferior. Existen variedades abelianas polarizadas indescomponibles que no son simples.

Descomposición de una variedad abeliana polarizada

Corolario

Sea (X, ω) una variedad abeliana polarizada que contiene subvariedades abelianas $X_1, \ldots, X_r$ y $Y_1, \ldots, Y_s$ tales que

$$(X, \omega) = \prod_{i=1}^{r} \left(X_j, \omega|_{X_j} \right) = \prod_{j=1}^{s} \left(Y_j, \omega|_{Y_j} \right).$$

Si $\left(X_1, \omega|_{X_1}\right), \ldots, \left(X_r, \omega|_{X_r}\right)$ y $\left(Y_1, \omega|_{Y_1}\right), \ldots, \left(Y_s, \omega|_{Y_s}\right)$ son irreducibles, se tiene $r = s$ y existe una permutación σ de $\{1, \ldots, s\}$ tal que $Y_j = X_{\sigma(j)}$ para todo j.

El corolario, aunque implica que los factores indescomponibles de una variedad abeliana polarizada están bien determinados, no dice nada acerca de cómo encontrarlos.
Veremos que existe tal método para las polarizaciones principales. Por lo tanto, sea X una variedad abeliana con una polarización principal ω, y Θ sea un divisor theta, definido m ´dulo polarización (cf 6.2.)

Descomposición de una variedad abeliana polarizada

Teorema

Sea X un toro complejo y sean L y M fibrados en rectas positivas tales que $L \otimes M$ sea amplio. Suponemos que M tiene una sección distinta de cero tal que la inclusión $H^0(X, L) \to H^0(X, L \otimes M)$ que induce es biyectiva. La aplicación

$$(X, [L \otimes M]) \longrightarrow (\bar{X}_L, [\bar{L}]) \times (\bar{X}_M, [\bar{M}])$$

es un isomorfismo de variedades abelianas polarizadas.

Demostración. El kernel $K(L)^0 \cap K(M)^0$ de esta aplicación está contenido en $K(L \otimes M)$ por lo tanto es finito. Como $\dim H^0(X, L \otimes M) < \dim H^0(X, L) + \dim H^0(X, M)$, la proposición 5.4 da $\dim \bar{X}_L + \dim \bar{X}_M \leq \dim X$, de modo que es una isogenia. EL Corolario 4.7 implica que su grado es

$$\frac{\dim H^0(X, L \otimes M)}{\dim H^0(X, L) \dim H^0(X, M)} \leq 1,$$

Descomposición de una variedad abeliana polarizada

Corolario

Sea (X, ω) una variedad abeliana principalmente polarizada. Cualquier divisor theta es reducido; denotamos $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ sus componentes irreducibles, $\bar{X}_j$ la variedad abeliana $X/K(\Theta_j)^0$ y $\bar{\Theta}_j$ el divisor de $\bar{X}_j$ cuya imagen inversa en X es Θ_j (th. 5.1). Este divisor define una polarización principal indescomponible ω_j en $\bar{X}_j$ y el morfismo

$$(X, \omega) \to \left(\bar{X}_1, \omega_1\right) \times \cdots \times \left(\bar{X}_r, \omega_r\right)$$

es un isomorfismo de variedades abelianas principalmente polarizadas.

Demostración. Sólo el primer punto no resulta del teorema, sino del teorema del cuadrado, que resulta en $\dim H^0\left(X, \mathscr{O}_X(2D)\right) \geq 2$ para cualquier divisor efectivo D de X.

Descomposición de una variedad abeliana polarizada

Sea $X = V/\Gamma$ un toro complejo de dimensión g; denotamos por $\mathrm{End}(X)$ el anillo de endomorfismos de X. Según el Teorema II 2.3 p.77, se identifica con el anillo de endomorfismos $\mathbb{C}$-lineales de V que envían Γ hacia sí mismo. Es un subanillo de $\mathrm{End}(\Gamma)$, por lo tanto, un grupo abeliano libre de rango como máximo $4g^2$. El anillo de endomorfismos de una variedad abeliana "muy general" es $\mathbb{Z}$ (ejerc.VII.1. p.102).

Teorema

Sea X un toro complejo.
a) Si X es simple, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ es un anillo de división.
b) Si X es una variedad abeliana, es isogénica para un producto $X_1^{n_1} \times \cdots \times X_r^{n_r}$, donde $X_1, \ldots, X_r$ son variedades abelianas simples por pares no isogénicas, y

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \simeq \mathscr{M}_{n_1}\left(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\left(X_1\right)\right) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_r}\left(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\left(X_r\right)\right)$$

Definicion

Sea (X, ω) una variedad abeliana polarizada y u un endomorfismo de X. Definimos

$$u' = \varphi_\omega^{-1} \hat{u} \varphi_\omega \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$$

Se tiene

$$(u')' = u, \quad (u+v)' = u' + v' \quad \text{y} \quad (uv)' = v'u',$$

de modo que definimos así una anti-involución ' del $\mathbb{Q}$-álgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, a la que llamamos involución de Rosati.

Endomorfismos de Variedades Abelianas

Sea u un endomorfismo de la variedad abeliana $X = V/\Gamma$ y u_{R} sea el endomorfismo real de V inducido por u; comprueba $u_{\mathrm{R}}(\Gamma) \subset \Gamma$. Si u es una isogenia, su grado es la cardinalidad de su kernel $u_{\mathrm{R}}^{-1}(\Gamma)/\Gamma$, es decir, $[\Gamma : u_{\mathrm{R}}(\Gamma)]$, nuevamente el determinante de u_{R}. Cuando u no es una isogenia, el determinante de u_{R} es cero; configuramos $\deg(u) = 0$. Definimos la traza de u como la de u_{R}, y su polinomio característico P_u como la de u_{R}. Es un polinomio unitario de grado $2g$ con coeficientes enteros, y para cualquier número entero n, tenemos por lo anterior

$$P_u(n) = \deg(\mathrm{n} - u),$$

donde $\mathrm{n} : X \to X$ es la multiplicación por n.

Teorema

Sea (X, ω) una variedad abeliana polarizada. La aplicación

$$(u, v) \longmapsto \mathrm{Tr}\,(u' v)$$

es una forma bilineal simétrica definida positiva racional en $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Demostración. Como la traza es $\mathbb{Z}$-lineal, podemos asumir que u y u' son endomorfismos de X. El polinomio característico de u' es entonces el de ${}^t\bar{u}_{\mathrm{R}}$, de modo que $P_{u'} = \bar{P}_u = P_u$. Por tanto, la forma bilineal del teorema es simétrica. Entonces tenemos, para cualquier número entero n,

$$\begin{aligned} \deg \varphi_{n\omega - u^*\omega} &= \deg\,(n\varphi_\omega - \varphi_{u^*\omega}) \\ &= \deg\,(n\varphi_\omega - \hat{u}\varphi_\omega u) \\ &= \deg\,(n\varphi_\omega - \varphi_\omega u' u) \\ &= \deg\,(\varphi_\omega)\deg\,(\mathrm{n} - u'u) = \deg\,(\varphi_\omega)\, P_{u'u}(n) \end{aligned}$$

Como la forma hermitiana H asociada con ω es definida positiva, existe una base compleja $\mathscr{B}$ de V en la que esta matriz es la identidad, mientras que la matriz D de la forma hermitiana (positiva) asociada a u^*H es diagonal, con coeficientes diagonales positivos $a_1, \ldots, a_g$. Dado que $\omega(x, iy) = \operatorname{Re} H(x, y)$, la matriz de ω en la base real $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$ de V es $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$, mientras que el de $u^*\omega$ es $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Si P es la matriz que pasa de una base de Γ a la base $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$, tenemos

$$\operatorname{pf}(\omega) = \det(P), \quad \operatorname{pf}(n\omega - u^*\omega) = \det(P) \det(nI_g - D).$$

Ahora el grado de $\varphi_{n\omega - u^*\omega}$ es $\operatorname{pf}(n\omega - u^*\omega)^2$ (th. 4.2 y el de φ_ω es $\operatorname{pf}(\omega)^2$; deducimos

$$P_{u'u}(n) = \det(nI_g - D)^2,$$

lo que da como resultado $\operatorname{Tr}(u'u) = 2(a_1 + \cdots + a_g) \geq 0$. Si es cero, $u^*\omega$ es cero y u es cero.

Endomorfismos de Variedades Abelianas

Si X es una variedad abeliana simple, $K = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ es, por lo tanto, un anillo de división de dimensión finita en $\mathbb{Q}$ provisto de un anti -involución'. El teorema anterior da como resultado $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(u'u) > 0$ para todos los u distintos de cero en K. Los pares $(K,')$ que satisfacen esta propiedad fueron clasificados por Albert (*cf*.[LB, §5,5, p. 133]); esto nos permite determinar completamente la lista de posibles álgebras $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$.