Variedades Abelianas

Semana 6

Sebastián Fuentes Olguín

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

15 de septiembre de 2023

§1. Condiciones de Riemann

Proposición

Sea ω una forma bilineal alternada, no degenerada y entera sobre Γ. Existen enteros estrictamente positivos $d_1, \ldots, d_g$ que satisfacen $d_1 \mid \cdots \mid d_g$ y una base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ en la cual la matriz de ω es

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix},$$

donde Δ es la matriz diagonal de coeficientes diagonales $d_1, \ldots, d_g$. Estos números enteros sólo dependen de ω, y definimos el pfaffiano de ω como $\mathrm{pf}(\omega) := d_1 \cdots d_g$.

Demostración. Consideremos $d_\Gamma \in \mathbb{Z}^+$ como el mayor valor positivo de ω sobre Γ y $\gamma_1, \gamma_{g+1} \in \Gamma$ tales que $\omega(\gamma_1, \gamma_{g+1}) = d_\Gamma$. Notemos ahora que para todo $\gamma \in \Gamma$, d_Γ divide a $\omega(\gamma_1, \gamma), \omega(\gamma, \gamma_{g+1})$. En efecto, si $\gamma = a_1\gamma_1 + a_{g+1}\gamma_{g+1} + \gamma'$ con $\gamma' \in \Gamma, a_1, a_{g+1} \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\omega(\gamma_1, \gamma) = a_1 \underbrace{\omega(\gamma_1, \gamma_1)}_{=0} + a_{g+1} \underbrace{\omega(\gamma_1, \gamma_{g+1})}_{=d_\Gamma} + \omega(\gamma_1, \gamma')$$

$$\Rightarrow a_{g+1} d_\Gamma = \underbrace{\omega(\gamma_1, \gamma) - \omega(\gamma_1, \gamma')}_{\in \mathbb{Z}}$$

y similar para $\omega(\gamma, \gamma_{g+1})$. Obtenemos así que:

$$\gamma - \frac{\omega(\gamma_1, \gamma)}{d_\Gamma}\gamma_{g+1} - \frac{\omega(\gamma, \gamma_{g+1})}{d_\Gamma}\gamma_1 \in \Gamma$$

Un cálculo directo muestra que el elemento anterior es ortogonal a $\mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_{g+1}$ respecto a ω, y como esta es no degenerada, obtenemos la descomposición:

$$\Gamma = (\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1}) \oplus (\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1})^{\perp}$$

Considerar ahora el reticulado $\Gamma' := (\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1})^{\perp}$ y similar a lo hecho anteriormente considerar $x, y \in \Gamma'$ tales que $\omega(x, y) = d_{\Gamma'}$. Podemos hacer divisón euclidiana $d_{\Gamma'} = q d_{\Gamma} + r$ con $0 \leq r < d_{\Gamma}$. Vemos que:

$$\omega(x - q\gamma_1, y + \gamma_{g+1}) = r$$

La minimalidad de d_{Γ} implica que $r = 0$, ie, d_{Γ} divide a $d_{\Gamma'}$. Realizando este proceso de manera descendente obtenemos la base requerida y la condición de divisilidad es asegurada por el cálculo anterior. $\square$

Condiciones de Riemann

Para que exista una forma Kähler completa en un toro complejo $X = V/\Gamma$, es necesario y suficiente que exista una base $\mathscr{B}$ del espacio vectorial complejo V , enteros estrictamente positivos $d_1, \ldots, d_g$ satisfactorio $d_1|\cdots|d_g$ y una matriz cuadrada compleja τ de orden g simétrica con parte imaginaria definida positiva tal que, en la base $\mathscr{B}$, tenemos

$$\Gamma = \tau \mathbf{Z}^g \oplus \Delta \mathbf{Z}^g,$$

donde Δ es la matriz diagonal de coeficientes diagonales $d_1, \ldots, d_g$.

Demostración. Supongamos que disponemos de una forma de Kähler entera en $X = V/\Gamma$, así que por el Lema anterior disponemos de una base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ y enteros $d_1 \mid \cdots \mid d_g$ para los cuales se tiene esa descomposición.

Consideremos entonces la $\mathbb{C}$–base $\mathscr{B} = (e_1 = \gamma/d_1, \ldots, e_g = \gamma/d_g)$ de V y denotemos $(\Delta \quad \tau)$ la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ en la base $\mathscr{B}$ y denotemos $R = \operatorname{Re}\tau, S = \operatorname{Im}\tau$. Haciendo un cambio de base obtenemos que la matriz de ω en la base real $(e_1, \ldots, e_g, ie_1, \ldots, ie_g)$ de V corresponde a:

$$\begin{pmatrix} \Delta & R \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & R \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & S^{-1} \\ -{}^tS^{-1} & {}^tS^{-1}\left(R - {}^tR\right)S^{-1} \end{pmatrix}$$

Ahora, ω es de tipo $(1,1)$ si y sólo si $\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$ para todos $x, y \in V$, así que necesariamente:

$${}^tS^{-1}\left(R - {}^tR\right)S^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad {}^tS^{-1} = S^{-1}$$

es decir, R, S son simétricas y por lo tanto τ también, y además se puede notar que S^{-1} corresponde a la matriz de la forma hermitiana asociada a ω en la base $\mathscr{B}$, así que es definida positiva.

Recíprocamente, si Γ se escribe de la forma indicada en el enunciado en la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_g)$ de V. La matriz $S^{-1} := (\operatorname{Im}\tau)^{-1}$ es simétrica y definida positiva así que define una forma hermitiana H en V respecto de la base $\mathscr{B}$. Se ve directamente que la parte imaginaria $\omega := \operatorname{Im} H$ es una forma $\mathbb{R}$–bilineal alternada de tipo $(1,1)$ cuya matriz en la base real $(e_1, \dots, e_g, ie_1, \dots, ie_g)$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & S^{-1} \\ -{}^tS^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando un cambio de base inverso al realizado anteriormente deducimos que su matriz en la base de Γ cuyas componentes vienen dadas por las columnas de la matriz $(\Delta \quad \tau)$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto ω solo toma valores enteros en Γ. $\square$

§2. Teorema de Riemann-Roch

Dado un fibrado en rectas $L \in \mathrm{Pic}(X)$ nuestro objetivo es poder calcular la dimensión del espacio $H^0(X, L)$, pues la existencia de secciones nos permitirá construir funciones $X \to \mathbb{P}^n$. Este es justamente el contenido del teorema de Riemann-Roch.

Siguiendo la notación de la sección anterior, tenemos una descomposición $V = W \oplus iW$, y la forma hermitiana H asociada a ω posee valores reales en $W \times W$ pues $\omega|_{W \times W} = 0$. Así, podemos extender H usando sus valores en $W \times W$ a una forma $\mathbb{C}$–bilineal simétrica B en todo $V \times V$.

Lema

Bajo las hipótesis anteriores se tiene que:

$$(H-B)(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in W\\ 2i\omega(x,y) & \text{si } y\in W\end{cases}$$

Demostración. El hecho que $(H-B)(x,y)=0$ si $x\in W$ se sigue simplemente del hecho que que esta función es nula en $W\times W$, y como es $\mathbb{C}$–lineal en la segunda variable esto se extiende a $W\times V$.

Si $y\in W$ entonces calculamos que:

$$(H-B)(x,y)=(\overline{H}-B)(y,x)=(\overline{H}-H)(y,x)=-2i\omega(y,x)=2i\omega(x,y)$$

donde hemos utiizado que H es hermitiana y que B extiende a H. □

Teorema (Riemann-Roch)

Sea X un toro complejo y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas cuya primera clase de Chern $c_1(L)$ es definida positiva. Entonces

$$\dim H^0(X, L) = \mathrm{pf}\,(c_1(L)) > 0.$$

Demostración. El Teorema de Appell-Humbert indica que todo fibrado en rectas en X proviene de una función theta normalizada (H,α), así que consideramos $L = L(H,\alpha)$. Ahora, vimos también que su espacio de secciones es isomorfo al espacio de funciones theta normalizadas de tipo (H,α), así que la prueba consistirá de calcular la dimensión del espacio de estas funciones.

Recordemos que estas son las funciones que verifican:

$$\vartheta(z+\gamma) = \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma,z) + \frac{\pi}{2} H(\gamma,\gamma)} \vartheta(z) \qquad \forall z \in V, \forall \gamma \in \Gamma$$

donde H es la forma hermitiana asociada a la forma alternada $\omega := c_1(L)$ y α es tal que:

$$\alpha(\gamma_1+\gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\,\alpha(\gamma_2)\,(-1)^{\omega(\gamma_1,\gamma_2)}$$

Notemos en primer lugar que basta verificar la condición anterior solo en una base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ de Γ.

En lo que sigue, nuestra base será aquella en la que tengamos la descomposición dada en las condiciones de Riemann para la existencia de una forma de Kähler, y en el orden $\{\gamma_{g+1}, \dots, \gamma_{2g}, \gamma_1, \dots, \gamma_g\}$. Consideramos $\Gamma' := \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\gamma_g$, y $\ell \in V^*$ $\mathbb{C}$–lineal tal que $\alpha(\gamma) = e^{2i\pi\ell(\gamma)}$ para todo $\gamma \in \Gamma'$ (lo cual es posible pues $\alpha : \Gamma \to U(1)$.

Definimos la función:

$$\widetilde{\vartheta}(z) = e^{-\frac{\pi}{2}B(z,z)-2i\pi\ell(z)}\vartheta(z)$$

Un cálculo muestra que $\widetilde{\vartheta}(z)$ es también una función theta de tipo (H, α) verificando:

$$\begin{aligned}\widetilde{\vartheta}(z+\gamma) &= e^{-\pi B(\gamma,z)-\frac{\pi}{2}B(\gamma,\gamma)-2i\pi\ell(\gamma)}\alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\widetilde{\vartheta}(z) \\ &= \alpha(\gamma)e^{-2i\pi\ell(\gamma)}e^{\pi(H-B)(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma,\gamma)}\widetilde{\vartheta}(z).\end{aligned}$$

El Lema previo muestra que la función $\widetilde{\vartheta}$ es de hecho $\Gamma'-$periódica, así que ésta admite un desarrollo en serie de Fourier:

$$\widetilde{\vartheta}(z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} c(m) e^{2i\pi \sum_k m_k z_k}$$

donde $z = \sum_{k=1}^{g} z_k \gamma_k$ con $z_1, \ldots, z_g \in \mathbb{C}$. Además, notamos que:

$$\widetilde{\vartheta}\left(z + \gamma_{g+j}\right) = b_j e^{\pi (H-B)(\gamma_{g+j}, z)} \widetilde{\vartheta}(z)$$

donde hemos utilizado la notación:

$$b_j = \alpha\left(\gamma_{g+j}\right) e^{-2i\pi \ell(\gamma_{g+j})} e^{\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma_{g+j}, \gamma_{g+j})}$$

Nuevamente gracias al Lema previo tenemos que:

$$(H-B)(\gamma_{g+j},z)=\sum_k z_k(H-B)(\gamma_{g+j},\gamma_k)=-2id_jz_j$$

Gracias a la base que hemos considerado, tenemos que $\gamma_{g+j}=\sum_{k=1}^{g}\frac{\gamma_k}{d_k}\tau_{kj}$, ie, tenemos:

$$\gamma_{g+j}=\sum_{k=1}^{g}\tau_{kj}e_k=\sum_{k=1}^{g}\frac{\gamma_k}{d_k}\tau_{kj}$$

así que:

$$\widetilde{\vartheta}(z+\gamma_{g+j})=\sum_{m\in\mathbf{Z}^g}c(m)e^{2i\pi\left(\sum_k m_k\left(\frac{\tau_{kj}}{d_k}+z_k\right)\right)}=b_j\sum_{m\in\mathbf{Z}^g}c(m)e^{2i\pi(\sum_k m_kz_k-d_jz_j)}$$

La unicidad de los coeficientes de la serie de Fourier nos lleva a deducir la identidad:

$$c(m)e^{2i\pi \sum_k \frac{m_k}{d_k}\tau_{kj}} = b_j c\left(m + d_j \varepsilon_j\right) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}^g, \forall j \in \{1, \ldots, g\}$$

donde ϵ_j denota el vector base canónico con j–ésima coordenada 1. Notemos entonces que, si conocemos los coeficientes $c(m)$ para todos aquellos $m \in \mathbb{Z}^g$ tales que $0 \leq m_j < d_j$, entonces todos los demás coeficientes quedan únicamente definidos por la fórmula anterior. De esto deducimos entonces que:

$$\dim H^0(X, L) \leq d_1 \cdots d_g =: \mathrm{pf}(\omega)$$

Por otro lado, si fijamos coeficientes $c(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}^g$ tal que $0 \leq m_j < d_j$ entonces la fórmula de recurrencia obtenida anteriormente nos da que:

$$|c(m)| \leq \left| e^{2i\pi \sum_{j,k} \frac{m_j}{d_j} \frac{m_k}{d_k} \tau_{jk} + \text{ términos de grado } \leq 1 \text{ en } m} \right|$$

y la hipótesis de que $\mathrm{Im}(\tau)$ es definida positiva nos permite entonces concluir que estos coeficientes $c(m)$ dan una serie de Fourier convergente, por tanto definen una función theta y a su vez una sección de L. Así, hay al menos $\mathrm{pf}(\omega)$ secciones linealmente independientes de L. $\square$

§3. Incrustamientos en el espacio proyectivo

A continuación abordaremos uno de los problemas planteados al comienzo del seminario: construir un incrustamiento holomorfo $X = V/\Gamma \to \mathbb{P}^n$. En primer lugar, vimos que toda función holomorfa de esta forma proviene de un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\widetilde{u}"] \arrow[d] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ V/\Gamma \arrow[r, "u"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

y además, sabemos que sus coordenadas son funciones theta, ie, $\widetilde{u} = (\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$.

Ahora, que la función u sea un incrustamiento es de hecho equivalente a que u sea inyectiva y que además la matriz:

$$\begin{pmatrix} \vartheta_0(z) & \frac{\partial\vartheta_0}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial\vartheta_0}{\partial z_g}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vartheta_n(z) & \frac{\partial\vartheta_n}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial\vartheta_n}{\partial z_g}(z) \end{pmatrix}$$

sea de rango $g+1$ para todo $z \in V$.

Lo anterior es una relectura en este contexto del siguiente teorema.

Teorema

Si X, Y son variedades complejas y $u : X \to Y$ es una aplicación holomorfa inyectiva con diferencial $du : TX \to TY$ inyectivo, entonces $u(X)$ es una subvariedad y u induce un isomorfismo entre X y $u(X)$.

Lema

Sea X un toro complejo, $L(H, \alpha) \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas sobre X, $a \in X$ y $\tau_a : X \to X, x \mapsto x - a$ traslación por a. Entonces:

$$\tau_a^* L(H, \alpha) \simeq L\left(H, \alpha e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, a)}\right)$$

Demostración. Recordemos que el fibrado $L(H, \alpha)$ se define como el cociente de $V \times \mathbb{C}$ por la acción:

$$\gamma \cdot (z, t) = \left(z + \gamma, \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma, z) + \frac{\pi}{2} H(\gamma, \gamma)} t\right)$$

mientras que, por definición del pullback de un fibrado vectorial, $\tau_a^* L(H, \alpha)$ es el cociente de $V \times \mathbb{C}$ por la acción:

$$\gamma \cdot (z, t) = \left(z + \gamma, \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma, z+a) + \frac{\pi}{2} H(\gamma, \gamma)} t\right)$$

Consideremos una función entera f sobre V que no se anule nunca. Entonces, podemos observar que si alteramos las funciones que definen el fibrado en un factor de $f(z+\gamma)/f(z)$ obtenemos un fibrado isomorfo (pues una función de esta forma define un fibrado en rectas en X el cual posee una sección que no se anula nunca y por tanto es trivial). Si consideramos $f(z) = e^{-\pi H(a,z)}$ obtenemos:

$$\alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z+a)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\frac{f(z+\gamma)}{f(z)} = \alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Teorema del cuadrado

Sea X un toro complejo y L un fibrado en rectas en X. Para todos los puntos a y b de X, a

$$\tau_{a+b}^* L \otimes L \simeq \tau_a^* L \otimes \tau_b^* L.$$

Demostración. Por el teorema de Appell-Humbert basta considerar $L = L(H, \alpha)$. Recordando que:

$$L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2) \simeq L(H_1 + H_2, \alpha_1 \alpha_2)$$

y usando lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\tau_{a+b}^* L \otimes L &\cong L\left(H, \alpha e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, a+b)}\right) \otimes L(H, \alpha) \\
&\cong L\left(2H, \alpha^2 e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, a)} e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, b)}\right) \\
&\cong L\left(H, \alpha e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, a)}\right) \otimes L\left(H, \alpha e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, b)}\right) \quad \square
\end{aligned}$$

Antes de poder demostrar el teorema de Lefschetz comenzamos discutiendo una propiedad sobre funciones theta que será crucial. Si X es un toro complejo, $L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $\vartheta \in H^0(X, L)$ es una función theta asociada a L, para una colección de puntos $a_1, \ldots, a_r \in \mathrm{V}$ cuya suma sea 0 se cumple que:

$$z \mapsto \vartheta(z + a_1) \cdots \vartheta(z + a_r)$$

es una función theta normalizada asociada al fibrado $L^r := L^{\otimes r}$. En efecto:

$$\begin{aligned}\widetilde{\vartheta}(z+\gamma) = \prod_{j=1}^{r} \vartheta(z + a_j) &= \prod_{j=1}^{r} \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma, z+\alpha_j) + \frac{\pi}{2} H(\gamma,\gamma)} \vartheta(z + a_j) \\ &= \alpha(\gamma)^r e^{\pi r H(\gamma, z) + \frac{\pi}{2} r H(\gamma,\gamma)} \widetilde{\vartheta}(z)\end{aligned}$$

ie, es de tipo (rH, α^r) y en consecuencia está asociada a L^r.

Teorema (Lefschetz)

Sea X un toro complejo y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas sobre X.

1. Si L tiene una sección no idénticamente cero, la aplicación ψ_{L^r} define una aplicación holomorfa de X en un espacio proyectivo para todo $r \geq 2$.
2. Si la primera clase Chern de L es definida positiva, la aplicación ψ_{L^r} define una incrustación de X en un espacio proyectivo para todo $r \geq 3$.

Demostración. Sea ϑ la función theta asociada a una sección no nula de L. Si $r \geq 2$, notar que para todo $z_0 \in V$ un punto $a \in V$ tal que:

$$\vartheta\left(z_0 - a\right)\vartheta\left(z_0 + (r-1)a\right) \neq 0$$

Ahora, la función:

$$z \mapsto \vartheta(z-a)^{r-1}\vartheta(z+(r-1)a)$$

corresponde a una sección de $L^r := L^{\otimes r}$ que no se anula en z_0.

Lo anterior prueba 1. pues podemos escoger un conjunto de secciones de L^r tal que no se anulan simultáneamente en todo X (sin puntos de base) y por tanto definen $X \to \mathbb{P}^n, x \mapsto [\vartheta_0(x) : \ldots : \vartheta_n(x)]$.
Supongamos ahora que $c_1(L)$ es definida positiva. El teorema de Riemann-Roch afirma entonces que $H^0(X, L) > 0$ y por lo tanto existe una sección no nula, y podemos considerar su función theta normalizada correspondiente. Sea $(\varepsilon_0, \ldots, \vartheta_n)$ una base de $H^0(X, L^r)$ y $z_0 \in V$. La idea será ver entonces que estas secciones definen un incrustamiento mediante la caracterización dada al comienzo de la sección. Supongamos entonces que existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_g \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\lambda_0 \vartheta_j (z_0) + \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial \vartheta_j}{\partial z_k} (z_0) = 0 \tag{1}$$

para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Por el teorema del cuadrado tenemos que la función:

$$\vartheta_{ab}(z) = \vartheta(z-a)^{r-2}\vartheta(z-b)\vartheta(z+(r-2)a+b)$$

es una función theta normalizada correspondiente a una sección de L^r, para todos $a, b \in V$. Dado que las funciones consideradas al comienzo forman una base de $H^0(X, L)$ tenemos que (1) se extiende a estas secciones y obtenemos:

$$\lambda_0 \vartheta_{ab}(z_0) + \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial \vartheta_{ab}}{\partial z_k}(z_0) = 0 \qquad \forall a, b \in V$$

Definamos la función meromorfa:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial \log \vartheta}{\partial z_k}(z)$$

Un cálculo directo muestra que se verifica la relación:

$$(r-2)\psi(z_0 - a) + \psi(z_0 - b) + \psi(z_0 + (r-2)a + b) = \lambda_0 \qquad \forall a, b \in V$$

Notar ahora que para todo $a_0 \in V$ podemos encontrar $b \in V$ tal que $\vartheta(z_0 - b)\,\vartheta(z_0 + (r-2)a_0 + b) \neq 0$, y por lo tanto las funciones:

$$a \mapsto \psi(z_0 - b), \qquad a \mapsto \psi(z_0 + (r-2)a + b)$$

son holomorfas en a_0. Para $r \geq 3$ lo anterior implica que ψ es holomorfa en $z_0 - a_0$, y como a_0 es arbitrario deducimos que ψ es holomorfa en todo V.

Por otro lado, podemos ver que ψ verifica la ecuación:

$$\psi(z+\gamma) = \pi H(\gamma,\lambda) + \psi(z) \tag{2}$$

puesto que:

$$\psi(z+\gamma) - \psi(z) = \pi \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial H(\gamma,z)}{\partial z_k} = \pi H(\gamma,\lambda)$$

donde hemos empleado el teorema de Euler pues $z \mapsto H(\gamma,z)$ es lineal. Así, derivando la ecuación (2) observamos que ψ es $\Gamma-$periódica, y deducimos así que debe ser constante. Para $z=0$ tenemos:

$$\psi(\gamma) - \psi(0) = \pi H(\gamma,\lambda) \qquad \forall \lambda \in \Gamma$$

pero, ambos lados de la ecuación son $\mathbb{R}-$lineales en λ así que:

$$\psi(z) - \psi(0) = \pi H(z,\lambda) \qquad \forall z \in V \tag{3}$$

Como $c_1(L)$ es no degenerada, H tiene esta propiedad y luego (3) implica que $\lambda = 0$. Vemos entonces que se verifica la condición del rango en la matriz de derivadas y por lo tanto $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ definen un incrustamiento de X en $\mathbb{P}^n$. $\square$

Definición

Sea X variedad compleja compacta, $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas. Decimos que L es:

1. *muy amplio* si φ_L es un incrustamiento.
2. *amplio* si existe $r > 0$ tal que φ_{L^r} es un inscrustamiento.

Bajo esta definición, el teorema de Lefschetz se reescribe de la siguiente manera: *un fibrado $L \to X$ tal que $c_1(L)$ es definida positiva es amplio*.

§4. Dualidad de toros complejos

Sea X un toro complejo. La semana anterior se definió $\mathrm{Pic}^0(X)$ como el kernel de $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \underline{\mathbf{Z}})$. Vimos también que este grupo es en sí mismo un toro complejo, razón por la que lo denotamos $\widehat{X}$ y lo llamamos *toro dual*.

Definición

Sean X, X' toros complejos. Una isogenia es un morfismo sobreyectivo $\varphi : X \twoheadrightarrow X'$ de kernel finito, y definimos su grado como $\deg(\varphi) := |\ker(\varphi)|$.

Teorema

Sea X toro complejo y $L \in \mathrm{Pic}(X)$. La función:

$$\varphi_L : X \to \widehat{X}, \quad x \mapsto \tau_x^* L \otimes L^\vee$$

es un morfismo de grupos y si $c_1(L)$ es no degenerada entonces φ_L es una isogenia de $\deg(\varphi_L) = \mathrm{pf}(c_1(L))^2$.

Demostración. El hecho que φ_L sea morfismo viene del teorema del cuadrado:

$$\begin{aligned}
\varphi_L(x+y) = \tau_{x+y}^* L \otimes L^\vee &\cong \tau_x^* L \otimes \tau_x^* L \otimes L^\vee \otimes L^\vee \\
&\cong (\tau_x^* L \otimes L^\vee) \otimes (\tau_y^* L \otimes L^\vee) \\
&= \varphi_L(x) \otimes \varphi_L(y)
\end{aligned}$$

Dualidad de toros complejos

Suponer ahora que $\omega = c_1(L)$ es no degenerada. Recordemos que el morfismo φ_L se factoriza mediante:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Hom}(\Gamma, U(1)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}^0(X) \\ x & \longmapsto & e^{2i\pi \, \mathrm{Im}\, H(\cdot,x)} & \longmapsto & L(0, e^{2i\pi \, \mathrm{Im}\, H(\cdot,x)}) \end{array}$$

así que podemos probar que ψ es sobreyectivo.
Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}(\Gamma, U(1))$ Como Γ es un $\mathbb{Z}$−módulo libre, es proyectivo así que podemos considerar un morfismo $\ell : \Gamma \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\alpha(\gamma) = e^{2i\pi \, \mathrm{Im}\, H(\cdot,\ell(\gamma))}$$

Podemos extender entonces ℓ a una forma $\mathbb{R}$-lineal $\ell : V \to \mathbb{C}$ (denota por el mismo nombre), y como ω es no degenerada, existe $x \in V$ tal que $\ell(z) = \omega(z, x)$, ie, $\psi(\pi(x)) = \alpha$.

Notemos que el kernel de φ_L corresponde a aquellos $x \in X$ tales que $\tau_x^* L \cong L$, ie, tales que:

$$L\left(H, \alpha e^{2i \operatorname{Im} H(\cdot, a)}\right) \cong L(H, \alpha)$$

Si denotamos $\omega(\cdot, a) = \operatorname{Im} H(\cdot, a)$ y por $\widetilde{x}$ a un punto en la fibra $\pi^{-1}(x)$ llegamos a que:

$$K(L) = \{x \in X \mid \omega(\gamma, \widetilde{x}) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}$$

Si suponemos que ω es no degenerada, disponemos de una base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ como en la primera Proposición. Dado que los valores d_i fueron construidos con una propiedad de minimalidad, deducimos que:

$$\begin{aligned} K(L) &= \langle \gamma_1/d_1, \ldots, \gamma_g/d_g, \gamma_{g+1}/d_1, \ldots, \gamma_{2g}/d_g \rangle_{\mathbb{Z}-mod} \\ &\cong (\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/d_g\mathbf{Z})^2 \end{aligned}$$

deduciendo que φ_L es una isogenia de grado:

$$\deg(\varphi_L) = |K(L)| = (d_1 \cdots d_g)^2 = \operatorname{pf}(\omega)^2 \quad \square$$

El toro dual $\widehat{X}$ posee ciertas propiedades de functorialidad. En primer lugar, dada una aplicación holomorfa $u : X \to Y$ entre toros complejos, podemos definir la aplicación dual:

$$\hat{u} : \widehat{Y} \to \widehat{X}, [L] \mapsto [u^* L]$$

bien definida pues el pullback de fibrados preserva el hecho que la clase de Chern sea nula. Esta construcción es functorial (y contravariante) en el sentido que si $u : X \to Y, v : Y \to Z$ entonces:

$$\widehat{v \circ u} = \widehat{u} \circ \widehat{v} : \widehat{Z} \to \widehat{X} \tag{4}$$

Teorema

Sean X e y Y toros complejos y $u : X \to Y$ una aplicación holomorfa que satisfaga $u(0) = 0$.

1. El mapeo $\hat{u}$ es un morfismo de grupos holomorfo. En un $\hat{\hat{u}} = u$ y
$$\dim(\operatorname{Ker} \hat{u})^0 = \operatorname{codim}(\operatorname{coker} u) \quad \dim(\operatorname{coker} \hat{u}) = \operatorname{codim}(\operatorname{Ker} u)^0.$$
2. u es una isogenia si y sólo si $\widehat{u}$ es una isogenia. En este caso $\deg(u) = \deg(\widehat{u})$.
3. Los kernel de u y $\hat{u}$ tienen la misma cantidad de componentes conexas.

Demostración. Sabemos que la aplicación $u : X \to Y$ viene inducida por una aplicación $\mathbb{C}$–lineal $\widetilde{u} : V \to W$, y esta aplicación tiene asociada naturalmente su traspuesta ${}^t\widetilde{u} : \overline{W}^* \to \overline{V}^*, \ell \to \ell \circ u$. El punto 1. se sigue de notar que la aplicación $\widehat{u}$ viene inducida por ${}^t\widetilde{u}$.
Suponer ahora que $u : X \to Y$ es una isogenia donde $X = V/\Gamma_X, Y = W/\Gamma_Y$. En particular tenemos que $\dim(X) = \dim(Y)$ y por tanto $\widetilde{u} : V \to W$ es un isomorfismo (pues es sobreyectiva) así que podemos identificar estos espacios. Tenemos que $\ker(u) = \widetilde{u}^{-1}(\Gamma_Y) =: \Gamma_Y/\Gamma_X$, y en particular $\Gamma_X \subset \Gamma_Y$. Recordemos además que $\widehat{X} \cong \mathrm{Hom}(\Gamma_X, U(1))$, y bajo esta identificación tenemos que $\widehat{u}$ corresponde a la restricción $\mathrm{Hom}(\Gamma_Y, U(1)) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma_X, U(1))$.

Deducimos entonces que:

$$\ker(\widehat{u}) \cong \mathrm{Hom}\left(\Gamma_Y/\Gamma_X, U(1)\right) \cong \mathrm{Hom}(\ker(u), U(1)) \cong \ker(u)$$

donde hemos utilizado que $\ker(u)$ es finito. Finalmente,

$$\deg(\widehat{u}) = |\ker(u)| = \deg(u)$$

y la conclusión se sigue de $\widehat{\widehat{u}} = u$.
Para el punto 3. denotemos por $\nu(u)$ el número de componentes conexas del núcleo de u. Observemos que si definimos $\overline{X} = X/\ker(u)^0$, la aplicación $u : X \to Y$ se factoriza en dos isogenias:

$$X \to \overline{X} \xrightarrow{\overline{u}} u(X) \hookrightarrow Y$$

Dualizando las aplicaciones tenemos una descomposición:

$$\widehat{Y} \twoheadrightarrow \widehat{u(X)} \xrightarrow{\widehat{\overline{u}}} \widehat{\overline{X}} \to \widehat{X}$$

Ahora, notemos que $\ker(\overline{u}) = \ker(u)/\ker(u)^0$ y el orden de este grupo es justamente el número de componentes conexas de $\ker(u)$. El punto 2. nos da que $\nu(u) \leq \nu(\widehat{u})$. Por dualidad podemos obtener que:

$$\nu(\widehat{u}) \leq \nu(\widehat{\widehat{u}}) = \nu(u) \quad \Rightarrow \quad \nu(u) = \nu(\widehat{u})$$

$\square$

Corolario

Sea $u : X \to Y$ isogenia entre toros complejos y $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ amplio. Entonces:

$$\dim H^0(X, u^*L) = \deg(u) \dim H^0(Y, L)$$

Demostración. El teorema de isogenias junto con el teorema de Riemann-Roch nos da que:

$$\deg(\varphi_L) = \mathrm{pf}(c_1(L))^2 = (\dim H^0(Y, L))^2$$

Tenemos que $c_1(u^*L) = c_1(L)$ así que L es amplio, y φ_L es también una isogenia. Concluimos con el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\left(\dim H^0(X, u^*L)\right)^2 &= \deg(\varphi_{u^*L}) = \deg(\hat{u} \circ \varphi_L \circ u) \\ &= \deg(\hat{u}) \deg(\varphi_L) \deg(u) \\ &= (\deg(u))^2 \left(\dim H^0(Y, L)\right)^2 \qquad \square\end{aligned}$$

Bibliografía

- Debarre, Olivier, "Tores et variétés abéliennes complexes", 2000.
- Lange, Herbert & Birkenhake, Christina. (1992). "Complex Abelian Varieties", 1992.