Sea X un toro complejo, $u : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ una incrustación. Ya vimos que u es dada por funciones theta del mismo tipo.

Objetivo: Definir un fibrado en rectas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, las funciones theta que definen a u serán las secciones de $u^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, y la forma diferencial $u^*\omega_{FS}$ representará la primera clase de Chern del fibrado.

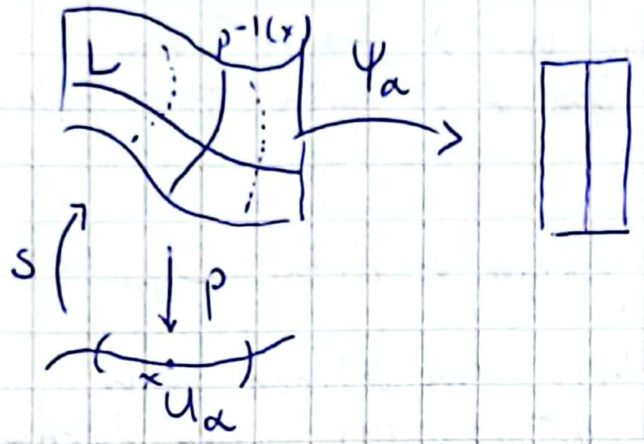
1) Fibrados en rectas.

Sea X una variedad compleja conexa.

Def. Un fibrado en rectas sobre X es una variedad compleja L y una proyección $p : L \to X$ holomorfa tq existe un recubrimiento $(\mathcal{U}_\alpha)$ de X y trivializaciones $\varphi_\alpha : p^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C}$, y las composiciones

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{C} \longrightarrow (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{C}$$
$$(x, t) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)\, t)$$

son lineales ($g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$).



Una sección es $s: X \longrightarrow L$ holomorfa tq $p \circ s = Id_X$. El conjunto de secciones es $\Gamma(X, L)$.

Ejemplo: La sección nula es $s_0(x) = \Psi_\alpha^{-1}(x, 0)$ $\forall x \in U_\alpha$.

Los isomorfismos $u: L \to L'$ son compatibles con las proyecciones y lineales en las fibras.

Sea $u: X \to Y$ holomorfa, $p: L \to Y$ fibrado en rectas. El pullback es

$$u^* L := \{(x, \ell) \in X \times L \mid u(x) = p(\ell)\} \xrightarrow{p_1} X.$$

$$\Gamma(u): \Gamma(Y, L) \longrightarrow \Gamma(X, u^* L)$$
$$s \longmapsto (x, s(u(x)))$$

Ejemplos:

1) Fibrado trivial: $p_1: X \times \mathbb{C} \to X$
$g_{\alpha\beta} = 1$

2) Fibrado tautológico:
Sea W un $\mathbb{C}$-e.v.
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1) := \{(x,v) \in \mathbb{P}W \times W \mid v \in \ell_x\} \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}W$

$g_{\alpha\beta}(x) = \dfrac{x_\alpha}{x_\beta}$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$

3) Fibrado canónico:
Sea X una variedad compleja de dimensión n.
ω_X es tq $\omega_X^{-1}(x) = \{$formas de tipo $(n,0)$ sobre $T_x X\}$

Hecho: - Identificando $(x,t) \in U_\beta \times \mathbb{C} \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)t) \in U_\alpha \times \mathbb{C}$ $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$
reconstruimos L a partir de las $g_{\alpha\beta}$, luego podemos "olvidar" L.
- Se tiene $g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\gamma\alpha} = 1$
(condición de cociclo).

Grupo de Picard.

Los fibrados en rectas coinciden con los haces invertibles (localmente libres de rango 1), luego si $L = (U_\alpha, g_{\alpha\beta})$, $M = (U_\alpha, h_{\alpha\beta})$,

$\Rightarrow L^\vee = (U_\alpha, 1/g_{\alpha\beta})$, $L \otimes M = (U_\alpha, g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta})$,
$\Rightarrow \mathrm{Pic}(X) :=$ Fibrados en rectas sobre X / isomorfismo.

Ejemplo importante: Sea $r \in \mathbb{Z}^+$.

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1)^{\vee}$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(r) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1)^{\otimes r}$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-r) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1)^{\otimes r}$

$\Rightarrow \Gamma(\mathbb{P}W, \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(r)) \cong k[x_0, \dots, x_d]_r$

$\Gamma(\mathbb{P}W, \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-r)) \cong \{0\}$

$\Gamma(\mathbb{P}W, \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(0)) \cong \mathbb{C}$.

Hecho: $\{s$ sección holomorfa de $L\} \longleftrightarrow \{s_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ tq $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta\}$

- $\varphi: Div(X) \longrightarrow \{$Fibrados en rectas sobre $X\}$ (que admiten una sección meromorfa no nula) ✩

$D = (U_\alpha, h_\alpha) \longmapsto \mathcal{O}_X(D) := (U_\alpha, g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta})$

- $1 = \frac{h_\alpha}{h_\beta} \Rightarrow \ker \varphi = PDiv(X)$

- La inversa "requiere" de una sección meromorfa no nula s, D es efectivo si s es holomorfa.

$\Rightarrow Pic(X) \overset{def}{=} \{$Fibrados en rectas sobre $X\} \cong Div(X)/PDiv(X)$ (✩)

Def. El sistema lineal asociado a L es

$|L| := \{$ divisores efectivos de secciones holomorfas no nulas de $L \}$

(X compacta $\Rightarrow$ $\mathrm{div}: \mathbb{P}\Gamma(X, L) \longrightarrow |L|$ es biyectiva)

Hecho importante:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aplicaciones } u: X \to \mathbb{P}^r \\ \text{holomorfas tq } u(X) \not\subset H \\ \forall \text{ hiperplano } H \subset \mathbb{P}^r \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemas lineales } |L| \\ \text{de dimensión finita} \\ \text{sin "puntos de} \\ \text{base" sobre } X \end{array} \right\}$

$u \rightsquigarrow L = u^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1) \rightsquigarrow |L|$

$r+1$ secciones l.i. $\leftsquigarrow |L|$

$\Lambda = \langle s_0, \dots, s_r \rangle$

$u: X \longmapsto (s_0(x), \dots, s_r(x))$

(hiperplano $H \subset \Lambda$ de secciones nulas en x)

2) Construcción de fibrados en rectas sobre toros complejos.

Idea: $V \times \mathbb{C} \to V$ (fibrado trivial)

$\Big\downarrow$ Cocientar por la acción de Γ

$(z, t) \cdot \gamma = (z + \gamma, e_\gamma(z) t)$,

$e_\gamma : V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa

$V \times \mathbb{C} / \Gamma \longrightarrow V / \Gamma$

Si Θ función theta,
$e_\mu(z) := \frac{\Theta(z+\mu)}{\Theta(z)}$ funciona.

$\Rightarrow$ Si Θ normalizada de tipo (H,α),
escribimos $L = L(H,\alpha)$, y es tq

- $L(H_1,\alpha_1) \otimes L(H_2,\alpha_2) \cong L(H_1+H_2, \alpha_1\alpha_2)$
- $\Gamma(X, L(H,\alpha)) \cong \{$funciones theta normalizadas de tipo (H,α) sobre $X\}$

3.] Haces.

Def. Sea X un e.t. Un haz $\mathcal{F}$ sobre X es

- $\forall\, U \in \mathcal{T}(X)$, $\mathcal{F}(U)$.
- $\forall\, U, V \in \mathcal{T}(X)$ tq $V \subset U$, $r_{VU}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$

que satisface

a) (Restricción) $W \subset V \subset U \Rightarrow r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$

b) (Pegado) Si $(U_\alpha) \subset \mathcal{T}(X)$ tq $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$,
y si para todo α un elemento $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$
verifica $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$,
existe un único $f \in \mathcal{F}(U)$ tq $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ para todo α.

Escribimos $\Gamma(U,\mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$.

Ejemplos: 1) Sea K un conjunto.

$\underline{K}(U) := \{ f : U \to K$ localmente constante $\}$

2) $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^*, \mathcal{M}_X$

U conexo $\Rightarrow \mathcal{M}_X(U) := Fr(\mathcal{O}_X(U))$

3) Sea L un fibrado en rectas.

$\mathcal{L}(U) := \Gamma(U, L)$

4) Sea X una variedad diferenciable.

$\mathcal{A}_X^r(U) := \{ r$-formas diferenciales sobre $U \}$

$(\mathcal{A}_X^r(U) = \mathcal{C}^\infty(U))$

$\mathcal{A}^{p,q}(U)$

$(\mathcal{A}_X^{n,0} \overset{def}{=} \omega_X)$

Morfismos entre haces.

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces sobre X. Un morfismo $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es, para cada $U \in \mathcal{T}(X)$, $f(U): \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatibles con las restricciones.

Notación: $\Gamma(f) := f(X): \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$.

Es fácil definir haces de grupos abelianos.

Si $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, el haz kernel es

$(\mathrm{Ker}(f))(U) := \mathrm{Ker}(f(U))$

Pero $(\mathrm{Im}_{Pre}(f))(U) := \mathrm{Im}(f(U))$ no es un haz!

$\underset{\text{hacificación}}{\rightsquigarrow}$ $(\mathrm{Im}(f))(U)$ sí!

Ejemplo: $e: \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$
$f \mapsto e^{2i\pi f}$

$\ker(e) = \underline{\mathbb{Z}}$

U simplemente conexo $\overset{\text{existe logaritmo}}{\Longrightarrow}$ $e(U)$ sobreyectivo
$\Longrightarrow e$ sobreyectivo.

Pero $\mathrm{Im}(e(U))$ no es un haz! (Ejercicio)

4| Cohomología

Si $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''$ es una sucesión exacta de haces,

$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathcal{F}'')$

también, pero en general $\Gamma(g)$ no es sobreyectivo!

Buscamos asociar a cada sucesión exacta corta

$0 \to \mathcal{F}' \overset{f}{\hookrightarrow} \mathcal{F} \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}'' \to 0$

una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}') \xrightarrow{H^0(f)} H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(X,\mathcal{F}'')$$
$$\xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathcal{F}') \xrightarrow{H^1(f)} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{H^1(g)} H^1(X,\mathcal{F}'')$$
$$\xrightarrow{\delta^1} \cdots$$
donde $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ y $H^0(f) = \Gamma(f)$.

Def. Sea $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recubrimiento de X tq I está bien ordenado. El conjunto de cocadenas es

$$C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_q} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q})$$

Ejemplo: $C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\alpha} \mathcal{F}(U_\alpha)$

$$C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\alpha<\beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Definimos los operadores de coborde

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

por las fórmulas

$$\delta^0(s)_{\alpha_0\alpha_1} = s_{\alpha_1}\big|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} - s_{\alpha_0}\big|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}}$$

$$\delta^1(s)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = s_{\alpha_1\alpha_2}\big|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} - s_{\alpha_0\alpha_2}\big|_{\cdots} + s_{\alpha_0\alpha_1}\big|_{\cdots}$$

$$\vdots$$

$$\delta^q(s)_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j s_{\alpha_0\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{q+1}}\big|_{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{q+1}}}$$

Tenemos que $\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0$ ($\mathrm{Im}\,\delta^{q-1} \subset \mathrm{Ker}\,\delta^q$), luego definimos el grupo de cohomología de Čech

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \mathrm{Ker}\,\delta^q / \mathrm{Im}\,\delta^{q-1}$$

Pero depende de $\mathcal{U}$, luego refinamos el cubrimiento y

$$H^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\substack{\mathcal{U} \text{ cubrimiento} \\ \text{de } X}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

5] Primera clase de Chern

Proposición 5.1. Sea X una variedad compleja conexa.

i) $\mathrm{Div}(X) \cong H^0(X, \mathcal{M}_X^* / \mathcal{O}_X^*)$

ii) $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$

Dem.

i) Definición.

ii) Usar condición de cociclo para ver que $g \in \mathrm{Ker}\,\delta^1$. $\square$

La sucesión exponencial

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X^* \to 0$$

induce $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$

Def. Sea X variedad compleja, L fibrado en rectas sobre X. Si $c_1 : Pic(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$, $c_1(L)$ es la primera clase de Chern de L, y $Pic^0(X) := Ker(c_1)$.

Se puede calcular!

Si X variedad diferenciable, $H^\cdot(X, \mathbb{C}) \cong H_{dR}(X)$.

Def. Sea M variedad diferenciable compacta. Tenemos $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Las clases dentro de la imagen de $\varphi_q : H^q(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(M, \mathbb{C}) \cong H^q_{dR}(M)$ se llaman enteras.

En particular, tenemos

$$c_1^{\mathbb{R}} : Pic(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_2} H^2_{dR}(X)$$

$$[L] \longmapsto [\text{2-forma entera}]$$

Proposición 5.6. Sea s una sección local holomorfa de L que no se anula. La expresión $\omega = \frac{1}{2i\pi} \partial \bar{\partial} \log \|s\|^2$ no depende de s, y $\omega = c_1^{\mathbb{R}}(L)$

(Usar una métrica hermitiana para elegir la sección!)

Ejemplo: $c_1^{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = -c_1^{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = [\omega_{FS}]$

Corolario 5.2. $c_1^{\mathbb{R}}(u^* L) = u^* c_1^{\mathbb{R}}(L)$

Si $X = V/\Gamma$ es un toro complejo, y $r \in \mathbb{Z}^+_0$, entonces $H^r(X, \mathbb{Z}) \cong \Lambda^r \Gamma^*$,

$$H^r(X, \mathcal{O}_X) \cong \Lambda^r \overline{V}^* \cong \Lambda^{0,r} V^*$$

Proposición 5.9. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \underbrace{\Lambda^2 \Gamma^* \cap \Lambda^{1,1} V^*}_{\star} \to 0,$$

y $\mathrm{Pic}^0(X) \cong V^*/\hat{\Gamma}$, donde $\hat{\Gamma} := \{ \underbrace{\alpha : \Gamma \to U(1)}_{\text{caracter unitario}} \}$.

Generalización: X Kähler, $\star = NS(X) = \mathrm{Im}(c_1) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ abeliano, de tipo finito, y $\mathrm{Pic}^0(X)$ es un toro complejo.

Teorema 5.10. (Appell-Humbert)

Todo fibrado en rectas sobre un toro complejo es isomorfo a un $L(H, \alpha)$ únicamente determinado (su tipo).