CHAPTER 4

THETA FUNCTIONS AND DIVISORS

§4.1 Funciones Theta

Análogo al caso de dimensión uno, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.1. — Sea V un espacio vectorial y Γ un reticulado en V. Una función θ se llama una **función theta** en V asociada a Γ si es una aplicación holomorfa no nula que satisface la siguiente propiedad: para cada elemento $\gamma \in \Gamma$ existen una forma lineal $a_\gamma \in V^*$ y una constante $b_\gamma \in \mathbb{C}$ tales que

$$\theta(z+\gamma) = e^{2\pi i(a_\gamma(z)+b_\gamma)}\theta(z)$$

para todo $z \in V$. La familia $(a_\gamma, b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ se llama el **tipo** de θ.

Ejemplo 4.1.2. — (1) Cada función del tipo $z \mapsto e^{Q(z)}$, donde $Q \in \mathbb{C}[Z]$ es un polinomio de grado a lo más dos, es una función theta; las llamamos triviales.

(2) Si θ_1 y θ_2 son dos funciones theta del mismo tipo asociadas a Γ, entonces el cociente θ_1/θ_2 es Γ-periódico y, por lo tanto, define una función meromorfa en el toro complejo V/Γ.

A partir de la definición, las formas lineales a_γ están bien determinadas, mientras que las constantes b_γ están determinadas módulo un número entero. Además, existen algunas restricciones

$$\begin{aligned}\theta(z+\gamma_1+\gamma_2) &= e^{2\pi i(a_{\gamma_2}(z+\gamma_1)+b_{\gamma_2})}\theta(z+\gamma_1)\\ &= e^{2\pi i(a_{\gamma_2}(z)+a_{\gamma_2}(\gamma_1)+b_{\gamma_2})}e^{2\pi i(a_{\gamma_1}(z)+b_{\gamma_1})}\theta(z)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} a_{\gamma_1+\gamma_2} = a_{\gamma_1} + a_{\gamma_2} \\ b_{\gamma_1+\gamma_2} = a_{\gamma_2}(\gamma_1) + b_{\gamma_1} + b_{\gamma_2} \mod \mathbb{Z} \end{cases}$$

En particular, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma, z) & \longmapsto & a_\gamma(z) \end{array}$$

se puede extender a una función $a : V \times V \to \mathbb{C}$ que es $\mathbb{R}$-lineal en la primera coordenada y $\mathbb{C}$-lineal en la segunda variable.

Proposición 4.1.3. — *La forma alternada $\mathbb{R}$-bilineal ω en V*

$$\omega(x, y) = a(x, y) - a(y, x)$$

es real, intera sobre Γ, y satisface $\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$ para todo $x, y \in V$.

Demostración. — Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Por la observación anterior,

$$a_{\gamma_2}(\gamma_1) + b_{\gamma_1} + b_{\gamma_2} = b_{\gamma_1+\gamma_2} = a_{\gamma_1}(\gamma_2) + b_{\gamma_1} + b_{\gamma_2} \mod \mathbb{Z}$$

Entonces,

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2) = a_{\gamma_2}(\gamma_1) - a_{\gamma_1}(\gamma_2) \in \mathbb{Z}$$

Dado que ω es entera sobre Γ y Γ genera V como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces es real. Además, como a es $\mathbb{C}$-lineal en la segunda componente,

$$\begin{aligned} \omega(ix, iy) - \omega(x, y) &= a(ix, iy) - a(iy, ix) - a(x, y) + a(y, x) \\ &= ia(ix, y) - ia(iy, x) + ia(x, iy) - ia(y, ix) \\ &= i(\omega(ix, y) - \omega(x, iy)) \end{aligned}$$

Dado que el lado izquierdo es real y el derecho es puramente imaginario, ambos son cero; por lo tanto, se ha demostrado la proposición.

□

La forma ω se llama **forma de Riemann** de la función θ. Es nula si la función theta es trivial, por lo tanto, dos funciones theta equivalentes (es decir, cuyo cociente es una función theta trivial) tienen la misma forma de Riemann. Un cálculo rápido muestra que cualquier función theta es equivalente a una función theta normalizada, es decir, una que satisface

$$a = \frac{1}{2i} H \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(b_\gamma) = -\frac{1}{4} H(\gamma, \gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

donde H es la función hermitiana asociada a ω

$$H(x, y) = \omega(x, iy) + i\omega(x, y)$$

Tal función theta verifica

$$\theta(z + \gamma) = e^{2\pi i\left(\frac{1}{2i} H(\gamma, z) + \mathrm{Re}(b_\gamma) - \frac{i}{4} H(\gamma, \gamma)\right)} \theta(z) = \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma, z) + \frac{\pi}{2} H(\gamma, \gamma)} \theta(z)$$

donde $\alpha : \Gamma \to U(1)$ es el mapa $\gamma \mapsto e^{2\pi i \,\mathrm{Re}(b_\gamma)}$. Como

$$\mathrm{Re}(b_{\gamma_1+\gamma_2}) - \mathrm{Re}(b_{\gamma_1}) - \mathrm{Re}(b_{\gamma_2}) = \mathrm{Re}(a_{\gamma_2}(\gamma_1)) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2i} H(\gamma_2, \gamma_1) = \frac{1}{2} \omega(\gamma_2, \gamma_1)$$

α satisface

$$\alpha(\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)(-1)^{\omega(\gamma_1, \gamma_2)}$$

para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Entonces diremos que la tupla (H, α) es el tipo de la función theta normalizada.

Ejemplo 4.1.4. — Sea τ una matriz cuadrada compleja de orden g, simétrica, con parte imaginaria definida positiva, y sean a y b dos vectores columna reales de orden g. Definimos la **función theta de Riemann** $\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\cdot, \tau)$ como

$$z \mapsto \theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp i\pi\left({}^t(m+a)\tau(m+a) + 2{}^t(m+a)(z+b)\right)$$

Escribimos simplemente $\theta_{0,0}$ para $\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para cada $p, q \in \mathbb{Z}^g$

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau p + q) = \exp 2\pi i\left(-\frac{1}{2}{}^t p\tau p -{}^t pz +{}^t aq -{}^t pb\right)\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z)$$

Esto muestra que $\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es una función theta sobre el reticulado $\Gamma_\tau = \tau\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$ con $a_{\tau p+q} = -{}^t pz$. Para cada $x, y, x', y' \in \mathbb{R}^g$

$$\omega(\tau x + y, \tau x' + y') = -{}^t x(\tau x' + y') + {}^t x'(\tau x + y) = -{}^t xy' +{}^t x'y$$

ya que τ es simétrica. Si escribimos $iy = \tau x_1 + y_1$, tenemos $y = \operatorname{Im}(\tau x_1)$ y luego

$$H(y,y) = \omega(y, iy) ={}^t x_1 y ={}^t y(\operatorname{Im}(\tau))^{-1}y$$

Por bilinealidad, deducimos que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^g$

$$H(z_1, z_2) ={}^t \overline{z_1}(\operatorname{Im}(\tau))^{-1}z_2$$

Proposición 4.1.5. — *Para cualquier función theta, la forma de Riemann ω es positiva, es decir, $\omega(x, ix) \geq 0$ para todo $x \in V$.*

Demostración. — Podemos asumir que θ está normalizada. Sea

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi}{2}H(z,z)}\theta(z)$$

Entonces, para cualquier $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned}\varphi(z+\gamma) &= e^{-\frac{\pi}{2}(H(z,z)+H(z,\gamma)+H(\gamma,z)+H(\gamma,\gamma))}e^{\frac{1}{2i}H(\gamma,z)+b_\gamma}\theta(z) \\ &= e^{\pi i(\omega(\gamma,z)+2\operatorname{Re} b_\gamma)}\varphi(z)\end{aligned}$$

Tenemos que $|\varphi|$ es Γ-periódico, por lo tanto, acotado. Existe una constante $K \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|\theta(z)| \leq Ke^{\frac{\pi}{2}H(z,z)} \qquad \forall z \in V$$

Si $H(z_0, z_0) < 0$ para algún z_0, la función holomorfa $t \mapsto \theta(tz_0)$ tiende a cero a medida que $|t|$ tiende a infinito, por lo que es cero por el teorema de Liouville. Dado que $H(z, z) < 0$ en un entorno de z_0, la función θ debe ser idénticamente cero, lo cual es una contradicción.

□

Observación 4.1.6. — Recordemos que una (1, 1) forma diferencial ω se dice **forma de Kähler** si es cerrada y definida positiva. Toda forma de Kähler en un toro es equivalente en cohomología a una forma constante.

Sea N el kernel de H (que también es el kernel de ω), es decir,

$$N = \ker(H) = \{x \in V : H(x, y) = 0 \forall y \in V\}$$

para cada $z_0 \in V$ y cada $z \in N$, si θ está normalizada tenemos

$$|\theta(z_0 + z)| \leq K e^{\frac{\pi}{2} H(z_0, z_0)}$$

entonces, la función holomorfa $z \mapsto \theta(z_0 + z)$ es constante en N. En particular, una función theta donde la forma de Riemann es nula es trivial. Decimos que una función theta es **no degenerada** si la forma de Riemann es no degenerada. Esto es equivalente a decir que H está positivamente definida, o que ω es una forma de Kähler (entera).

Proposición 4.1.7. — *Sea θ una función theta sobre el espacio vectorial complejo V asociado al reticulado Γ, sea ω su forma de Riemann y N su kernel. La imagen de Γ en el espacio vectorial $V_N := V/N$ es una reticulado Γ_N, y θ proviene de una función theta no degenerada en el espacio vectorial V_N sobre el reticulado Γ_N.*

Demostración. — Fijemos una base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ de Γ. Existe una vecindad U del origen en V_N tal que $|H(z, \gamma_j)| < 1$ para cada j y $z \in V$ cuya imagen está en U. Si la imagen de z está en $\Gamma_N \cap U$, entonces $\omega(z, \gamma_j)$ es un entero estrictamente inferior a 1, por lo tanto, es cero. Tenemos $z \in N$, por lo que $\Gamma_N \cap U = \{0\}$ en V_N, lo que muestra que Γ_N es discreta. El espacio vectorial que genera es V_N y, por lo tanto, es una reticulado. El resto se deduce fácilmente.

□

§4.2 Divisores

Nuestro objetivo es mostrar que, al igual que en dimensión uno, cada función meromorfa sobre un toro complejo es el cociente de dos funciones theta. Para ello, necesitaremos generalizar la noción de divisores de curvas elípticas. En dimensiones superiores, las funciones meromorfas se anulan sobre subconjuntos de codimensión uno (una noción que debemos definir y que no es fácil). La idea natural será definir divisores como una combinación lineal formal con coeficientes enteros de estos subconjuntos. Desafortunadamente, este enfoque es mucho más complicado que en dimensión uno y surgen muchas dificultades técnicas. Por lo tanto, obtenemos la siguiente definición desagradable: un divisor es un objeto que se define localmente por una función meromorfa, con una buena condición de pegado módulo una relación de equivalencia.

Definición 4.2.1. — Sea X una variedad compleja.

(1) Decimos que una familia (U_α, h_α), donde (U_α) es un cubrimiento abierto de X y h_α son funciones meromorfas sobre U_α que no se anulan en ninguna componente conexa de U_α, es admisible si h_α/h_β es una función holomorfa que no se anula en $U_\alpha \cap U_\beta$ para cada α y β. Decimos que dos familias (U_α, h_α), (U'_β, h'_β) son equivalentes si su unión es admisible. Un **divisor** en X es una clase de equivalencia de familias admisibles.

(2) Si un divisor D sobre X se describe mediante una familia admisible (U_α, h_α), la familia $(U_\alpha, 1/h_\alpha)$ es admisible y define un divisor que no depende de D, lo denotamos como $-D$. Si un divisor D' en X se describe mediante la familia admisible (U'_β, h'_β), entonces la familia $(U_\alpha \cap U_\beta, h_\alpha h'_\beta)$ es admisible y describe un divisor que no depende de D ni de D', lo denotamos como $D + D'$.

(3) Un divisor es **efectivo** si hay un representante (U_α, h_α) donde las funciones h_α son holomorfas (todos los representantes satisfacen la propiedad).

(4) Si h es una función meromorfa no globalmente nula sobre X, el par (X, h) es un divisor llamado el **divisor de** h y se denota como $\operatorname{div}(h)$. Los divisores de este tipo se llaman **divisores principales**. Dos divisores se dice que son **linealmente equivalentes** si su diferencia es principal.

Es evidente que es mucho más complicado trabajar con esta definición. Por ejemplo, el siguiente resultado es evidente en dimensión uno, pero no lo es en dimensiones superiores.

Proposición 4.2.2. — *Cada divisor en una variedad compleja conexa es la diferencia de dos divisores efectivos.*

Demostración. — La demostración no será tan detallada ya que requiere herramientas que escapan al seminario. Sea $D = [(U_\alpha, h_\alpha)]$ y sea $x \in U_\alpha$. Dado que $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo local regular, es un DFD. Luego existen $u_{\alpha,x}, v_{\alpha,x}$ primos relativos en $\mathscr{O}_{X,x}$ tales que $h_\alpha = u_{\alpha,x}/v_{\alpha,x}$ en un entorno abierto $N_{\alpha,x}$ de x. Entonces $D = [(N_{\alpha,x}, f_\alpha)]$ y

$$\frac{u_{\alpha,x}}{u_{\beta,x}} = \frac{u_{\alpha,x}}{v_{\alpha,x}} \cdot \frac{v_{\alpha,x}}{v_{\beta,x}} \cdot \frac{v_{\beta,x}}{u_{\beta,x}} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \cdot \frac{v_{\alpha,x}}{v_{\beta,x}}$$

Dado que (U_α, h_α) es una familia admisible, h_α/h_β es holomorfo. Luego,

$$\frac{u_{\alpha,x}}{u_{\beta,x}} v_{\beta,x} = \frac{h_\alpha}{h_\beta} \cdot v_{\alpha,x}$$

el lado derecho es holomorfo y, por lo tanto, el lado izquierdo también es holomorfo. Dado que $u_{\beta,x}, v_{\beta,x}$ son primos relativos en $\mathscr{O}_{X,x}$, esto implica que $u_{\alpha,x}/u_{\beta,x}$ es holomorfo. Por el mismo argumento, $v_{\alpha,x}/v_{\beta,x}$ también es holomorfo y, por lo tanto, $(N_{\alpha,x}, u_{\alpha,x})$ y $(N_{\alpha,x}, v_{\alpha,x})$ son familias admisibles, y luego definen divisores efectivos D_1, D_2. Finalmente, notamos que $(U_\alpha, h_\alpha) \sim (N_{\alpha,x}, h_\alpha)$ y luego $D = D_1 - D_2$.

$\square$

En la demostración anterior,

$$\mathscr{O}_{X,x} := \{(U, f) : x \in U \subseteq X \text{ abierto y } f \in \mathscr{O}_X(U)\}/\sim$$

donde $\mathscr{O}_X(U)$ son las funciones holomorfas en X y

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \exists W \subseteq U \cap V \text{ vecindad de } x \text{ tal que } f|_W = g|_W$$

§4.3 Funciones meromorfas en un toro complejo

Ahora podemos presentar nuestro resultado principal. Sabemos que a cada función teta relativa a un reticulado Γ en un espacio vectorial V le podemos asignar un divisor efectivo sobre el toro complejo V/Γ.

Teorema 4.3.1. — *Todo divisor efectivo en un toro complejo es el divisor de una función teta.*

Demostración. — Sea D un divisor efectivo en el toro $X = V/\Gamma$ y (U_α, h_α) una descripción admisible de D. Sea $\pi : V \twoheadrightarrow X$ la proyección canónica. Supongamos que el componente conexa de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es convexo y no se encuentra con ninguna de las traslaciones por $\Gamma\backslash\{0\}$. Las funciones h_α son holomorfas, por lo que las formas $\omega_{\alpha\beta} = d\log(h_\alpha/h_\beta)$ son de tipo (1, 0) en $(U_\alpha \cap U_\beta)$. Sea (φ_α) una partición de la unidad relativa a la cubrimiento (U_α) de X, entonces la forma

$$\omega_\alpha = \sum_\gamma \varphi_\gamma \omega_{\alpha\gamma}$$

es de tipo (1, 0) sobre U_α y $\omega_\alpha - \omega_\beta = \omega_{\alpha\beta}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Las formas $d\omega_\alpha$ definen una 2-forma cerrada sobre X que no tiene parte de tipo (0, 2), que, según vimos antes, es equivalente en cohomología a una forma constante η sin el tipo (0, 2) ya que se obtiene promediando. Entonces existe una 1-forma ω_0 sobre X tal que

$$d\omega_\alpha = \eta + d\omega_0$$

sobre U_α. Podemos asumir que ω_0 es de tipo (1, 0). Escribimos

$$\pi^*\eta = \sum a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum b_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k = d\omega_1$$

con

$$\omega_1 = -\sum_j \left(\sum_k a_{jk} z_k + b_{jk} \overline{z}_k \right) dz_j = \sum_j \ell_j(z) dz_j$$

una forma de tipo (1, 0) sobre V, donde ℓ_j son formas lineales complejas sobre V. La forma $\pi^*(\omega_\alpha - \omega_0) - \omega_1$ es cerrada en $\pi^{-1}(U_\alpha)$, por lo que es exacta por el lema de Poincaré. Entonces existe una función f_α sobre $\pi^{-1}(U_\alpha)$ tal que $\pi^*(\omega_\alpha - \omega_0) - \omega_1 = df_\alpha$. Dado que ω_α, ω_0 y ω_1 son de tipo (1, 0), la función f_α es holomorfa. Luego, en $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$

$$df_\alpha - df_\beta = d\log \pi^*(h_\alpha/h_\beta)$$

por lo que, incluso multiplicando por una constante si fuese necesario en cada componente conexa de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, las funciones $e^{-f_\alpha}\pi^* h_\alpha$ se pueden pegar en una función holomorfa θ en V. Ahora queda por demostrar que θ es una función teta. Tenemos que en $\pi^{-1}(U_\alpha)$

$$\log \frac{\theta(z+\gamma)}{\theta(z)} = f_\alpha(z) - f_\alpha(z+\gamma)$$

entonces, dado que $\pi^*(\omega_\alpha - \omega_0)$ es Γ-periódica,

$$d\log \frac{\theta(z+\gamma)}{\theta(z)} = \omega_1(z+\gamma) - \omega_1(z) = \sum_j \ell_j(\gamma) dz_j$$

lo cual muestra, mediante la integración, que θ es una función teta con $a_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \ell(\gamma) z_j$, concluimos ya que $(U_\alpha, e^{f_\alpha \circ \pi|_{U_\alpha}^{-1}} h_\alpha) \sim (U_\alpha, h_\alpha)$.

□

En particular, se puede asociar a cada divisor efectivo D en un toro complejo una función theta normalizada única θ de la cual es el divisor, llamamos al **tipo** del divisor el tipo (H, α) de θ. La forma H es positiva y no es cero si D no es cero.

Corolario 4.3.2. — *Toda función meromorfa no nula en un toro complejo es el cociente de dos funciones theta del mismo tipo.*

Demostración. — Sea f una función meromorfa no nula en una variedad X con cubrimiento universal $\pi : V \twoheadrightarrow X$. Escribimos su divisor como la diferencia de dos divisores efectivos D_1, D_2. Sea θ una función theta del divisor D_2. La función $\theta \cdot (f \circ \pi)$ es holomorfa en V (dado que su divisor, D_1, es efectivo) y es una función theta del mismo tipo que θ ya que $f \circ \pi$ es meromorfa Γ-periódica.

□

Corolario 4.3.3. — *Sea X un toro complejo y $u : X \to \mathbb{P}^n$ una aplicación holomorfa. Entonces existen funciones theta normalizadas no nulas del mismo tipo $\theta_0, \dots, \theta_n$ sin ceros comunes tales que*

$$u(x) = [\theta_0(x) : \cdots : \theta_n(x)]$$

para cada $x \in X$.

Demostración. — Podemos asumir, incluso si significa eliminar coordenadas para obtener un espacio proyectivo más pequeño, que la imagen de u no está contenida en ningún hiperplano $x_j = 0$.

Como vimos en un ejemplo, para cada $j \in \{0, \dots, n\}$, la ecuación $x_j = 0$ define un divisor efectivo en $\mathbb{P}^n$ y, por el mismo hecho, la ecuación $x_j \circ u = 0$ define un divisor efectivo D_j sobre X. Sea θ_0 una función teta normalizada asociada al divisor D_0. Para cada j, la función

$$\theta_j = \frac{x_j \circ u}{x_0 \circ u}\theta_0$$

es igual al divisor D_j, que es efectivo. Además, es holomorfa. Dado que la función meromorfa $(x_j \circ u)/(x_0 \circ u)$ es Γ-periódica, la función holomorfa θ_j es una función teta del mismo tipo que θ_0 (en particular, normalizada) y la morfismo u está definido por $[\theta_0 : \cdots : \theta_n]$

□

Corolario 4.3.4. — *Sea X un toro complejo. Supongamos que existe una aplicación holomorfa $u : X \to \mathbb{P}^n$ y un punto $x \in X$ tal que $u^{-1}(u(x))$ sea finito. Entonces existe una forma de Kähler integral en X.*

Demostración. — Según el corolario anterior, existen funciones theta normalizadas $\theta_0, \ldots, \theta_n$ del mismo tipo, sin ceros comunes, de modo que u está definida por $u(x) = [\theta_0 : \cdots : \theta_n]$. Por lo tanto, existe una forma de Riemann común a las θ_j y N sea su kernel. Como la fibra de u es finita, el resultado 1.6 nos dice que N es nulo y ω es una forma de Kähler integral en X.

□

Corolario 4.3.5. — *Sea X una variedad toroidal compleja. Entonces existe un toro complejo X_{ab} (llamado la* ***abelianización de*** *X) y una aplicación holomorfa sobreyectiva $\rho : X \twoheadrightarrow X_{ab}$ tal que*

(1) *Existe una forma de Kähler entera en X_{ab}*
(2) *Cada aplicación holomorfa de X a un espacio proyectivo se puede factorizar mediante ρ*
(3) *ρ induce un isomorfismo de cuerpos de funciones meromorfas $\mathscr{M}(X_{ab}) \simeq \mathscr{M}(X)$*
(4) *ρ induce un isomorfismo de grupos* $\mathrm{Div}(X_{ab}) \simeq \mathrm{Div}(X)$

Demostración. — Sea N la intersección de los kernel de las formas de Riemann de todas las funciones theta en X. Entonces existen funciones theta $\theta_1, \ldots, \theta_r$ tal que la intersección de los kernel de sus formas de Riemann $\omega_1, \ldots, \omega_r$ es N. La forma de Riemann asociada a la función theta $\theta_1 \ldots \theta_r$ es $\omega_1 + \cdots + \omega_r$, y dado que ω_j son positivas, su kernel es N. Sea $V_{\mathrm{ab}} := V/N$, entonces por lo visto previamente, la imagen Γ_{ab} vía la proyección canónica de Γ en V_{ab} es un reticulado, por lo que definimos $X_{\mathrm{ab}} := V_{\mathrm{ab}}/\Gamma_{\mathrm{ab}}$. Es evidente que ω induce una forma de Kähler integral en X_{ab}.

Según un corolario, toda aplicación holomorfa $u : X \to \mathbb{P}^n$ está definida por funciones theta normalizadas del mismo tipo, con la misma forma de Riemann ω. Por construcción, el kernel de ω contiene a N, y u se factoriza mediante el mapa cociente $\rho : X \to X_{\mathrm{ab}}$.

Según un corolario, toda función meromorfa f en X es el cociente de dos funciones theta del mismo tipo, que podemos asumir normalizadas. Estas provienen de X_{ab} y, por lo tanto, también lo hace f.

Finalmente, para cada divisor D en X, escrito como $D_1 - D_2$, donde D_1, D_2 son efectivos. Según el teorema, existen dos funciones theta θ_1, θ_2, que podemos asumir normalizadas, que inducen los divisores D_1 y D_2, respectivamente. Dado que provienen de X_{ab}, también lo hace D, lo que demuestra d).

□

Veremos más adelante que la extensión de cuerpos $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}(X_{\mathrm{ab}})$ sobre $\mathbb{C}$ es de tipo finito y la dimensión de trascendencia es $\dim(X_{\mathrm{ab}})$.

Las únicas funciones meromorfas en un toro complejo muy general de dimensión al menos dos son constantes (su abelianización es nula).