Variedades Abelianas

Semana 3

Sebastián Fuentes Olguín

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

25 de agosto de 2023

Definición

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo k, $r \in \mathbb{N}$. Una aplicación r–multilineal $f : V^r \to W$ se dice *alternada* si satisface que:

$$f(x_1, \dots, x_r) = 0 \quad \text{si} \quad x_i = x_j \text{ para ciertos } i \neq j$$

Si V es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ definimos:

$$\bigwedge^r V^* := \{\varphi : V^r \to \mathbb{R} | \varphi \text{ r-multilineal alternada}\}$$

Si $\ell_1, \dots, \ell_r \in V^*$ podemos definir la aplicación:

$$V^r \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \epsilon(\sigma) \ell_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \ell_r(x_{\sigma(r)})$$

donde $\mathfrak{S}_r$ denota el grupo simétrico de r elementos.

La aplicación definida antes es claramente $r-$multilineal alternada, y será denotada por $\ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_r$.
Por ejemplo, para $r = 2$ si $\ell_1, \ell_2 \in V^*$ tenemos que:

$$(\ell_1 \wedge \ell_2)(x, y) = \ell_1(x)\ell_2(y) - \ell_1(y)\ell_2(x)$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V la colección:

$$\{e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_r} : 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n\}$$

es una base de $\bigwedge^r V^*$, donde $(e^*_1, \ldots, e^*_n)$ es la base dual, y por lo tanto este espacio es de dimensión $\binom{n}{r}$. Así, un vector $\omega \in \bigwedge^r V^*$ se representa como:

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_r}$$

De manera similar, dado un $\mathbb{R}$–espacio vectorial V de dimensión finita $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, podemos considerar el espacio vectorial

$$\bigwedge^r V_{\mathbb{C}}^* = \{\varphi : V^r \to \mathbb{C} \text{ multilineal alternada}\}$$

que naturalmente es también un espacio vectorial complejo de dimensión $\binom{n}{r}$. En efecto, notando que una aplicación multilineal alternada $\varphi : V^r \to \mathbb{C}$ se puede descomponer en $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in \bigwedge^r V^*$, así que tenemos un isomorfismo $\mathbb{C}$–lineal:

$$\bigwedge^r V_{\mathbb{C}}^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^r V^*\right) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad \varphi_1 + i\varphi_2 \longleftrightarrow \varphi_1 \otimes 1 + \varphi_2 \otimes i$$

de donde $\dim_{\mathbb{C}}(\bigwedge^r V_{\mathbb{C}}^*) = \dim_{\mathbb{R}}(\bigwedge^r V^*) = \binom{n}{r}$.

Consideremos ahora V un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Podemos definir el espacio vectorial complejo:

$$V_{\mathbb{C}}^{*} = \{\varphi : V \to \mathbb{C} | \varphi \text{ es } \mathbb{R}\text{–lineal}\}$$

y de manera similar a lo visto anteriormente:

$$V_{\mathbb{C}}^{*} \cong V_{\mathbb{R}}^{*} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^{*}) = \dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}^{*}) = 2n$$

donde $V_{\mathbb{R}}^{*}$ denota el espacio dual de V pensado como $\mathbb{R}$–espacio vectorial. En particular, las formas $\mathbb{C}$–antilineales[1]. El espacio de formas $\mathbb{C}$–antilineales se denotará por $\overline{V}^{*}$, y tenemos una descomposición en suma directa:

$$V_{\mathbb{C}}^{*} = V^{*} \oplus \overline{V}^{*}$$

donde V^{*} denota el espacio dual de V como $\mathbb{C}$–espacio vectorial.

[1] ie, que verifican $f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

Ahora, para cada par de enteros positivos $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tal que $p+q=r$, podemos definir el $\mathbb{C}$–espacio vectorial:

$$\bigwedge^{p,q} V^* = \mathrm{Span}\{\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_p \wedge \ell'_1 \wedge \cdots \wedge \ell'_q : \ell_1, \dots, \ell_p \in V^*, \ell'_1, \dots, \ell'_p \in \overline{V}^*\}$$

Llamamos a los elementos de $\bigwedge^{p,q} V^*$ formas de tipo (p,q). Por ejemplo, una $(r,0)$ forma no es más que una r–forma $\mathbb{C}$–multilineal alternada. De manera similar a la descomposición vista antes tenemos la siguiente descomposición de espacios vectoriales:

$$\bigwedge^{r} V^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{(p,q)} V^*$$

Fijando una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V obtenemos una base de $\bigwedge^{p,q} V^*$ formada por elementos:

$$e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_p} \wedge \overline{e_{k_1}}^* \wedge \cdots \wedge \overline{e_{k_q}}^*$$

con $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n, 1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq n$.

Ejemplo

Consideremos el caso $r = 2$. Es directo verificar que una $(1,1)$–forma $\omega \in \bigwedge^{1,1} V^*$ está caracterizada por la identidad:

$$\omega(ix, iy) = \omega(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

De manera similar, las formas de tipo $(2,0)$ y $(0,2)$ están caracterizadas por $\omega(ix, iy) = -\omega(x, y)$.

§2. Formas diferenciales y cohomología de De Rham

Consideremos V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión n. Una $r-$forma diferencial real (respectivamente compleja) sobre un abierto $U \subset V$ es una función suave $\omega : U \subset V \to \bigwedge^r V^*$ (respectivamente $\omega : U \subset V \to \bigwedge^r V^*_{\mathbb{C}}$).
Si fijamos un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ en V (fijar una base), tenemos que una $r-$forma diferencial es una expresión de la forma:

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n} \omega_{j_1 \cdots j_r}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

donde $\omega_{j_1 \cdots j_r} : U \subset V \to \mathbb{R}$ son funciones suaves y los $dx_j \in V^*$ denotan las funciones coordenadas:

$$dx_j : V \to \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mapsto a_j$$

Sean V, V' $\mathbb{R}$–espacios vectoriales de dimensiones n, n' respectivamente, $U \subset V, U' \subset V'$ abiertos y $F : U \to U'$ función suave. Para

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n} \omega_{j_1 \cdots j_r} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r}$$

forma diferencial definida sobre U', definimos su pullback mediante:

$$F^* \omega(x) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n} \omega_{j_1 \cdots j_r}(x) df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_r}$$

donde $F = (f_1, \ldots, f_{n'})$.

Sea $f : U \subset V \to \mathbb{C}$ función suave. Definimos su diferencial como la 1–forma (aplicación $\mathbb{R}$–lineal) dada por la expresión:

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$$

De manera general, si $\omega(x) = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_r\leq n} \omega_{j_1\cdots j_r}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$ es una r–forma diferencial, su derivada es la $(r+1)$–forma diferencial:

$$d\omega = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_r\leq n} d\omega_{j_1\cdots j_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

Observación importante

Es inmediato notar que $d^2 = 0$. Esta observación nos permite notar que las formas diferenciales forman naturalmente un complejo de espacios vectoriales, lo cual será la clave para definir la cohomología de De Rham.

Definición

Sea ω una r–forma diferencial. Decimos que una forma diferencial ω es cerrada si $d\omega = 0$. De manera similar, decimos que ω es exacta si existe una $(r-1)$–forma η tal que $\omega = d\eta$.

En el caso de una 1–forma $\omega = \sum \omega_j dx_j$, tenemos:

$$d\omega = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j = \sum_{1 \le j < k \le n} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} \right) dx_j \wedge dx_k$$

así que:

$$d\omega = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} \quad \forall j, k$$

Lema de Poincaré

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto estrellado respecto a cierto $x \in \Omega$. Entonces toda forma diferencial cerrada en Ω es exacta.

Demostración. Probaremos el caso en que $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j dx_j$ es una 1–forma cerrada y sin pérdida de generalidad que U es estrellado respecto a $0 \in \Omega$. El hecho que ω sea cerrada nos dice que:

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \quad \forall i, j$$

Como Ω es estrellado, podemos considerar la parametrización de $\gamma = [0, x]$ por una recta y definir la aplicación:

$$f(x) = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \omega_j(tx) x_j dt$$

Derivando la aplicación anterior tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \left(\omega_k(tx) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}(tx) t x_j \right) dt \\
&\underbrace{=}_{d\omega=0} \int_0^1 \left(\omega_k(tx) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}(tx) t x_j \right) dt \\
&= \left[t\omega_k(tx) \right]_0^1 = \omega_k(x)
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos la conclusión. □

La hipótesis de que Ω sea estrellado es crucial para que se cumpla lo anterior. Si consideramos por ejemplo $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la forma diferencial:

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

es cerrada en Ω, pero no es exacta.

Conociendo ya qué es una forma diferencial sobre un espacio vectorial, podemos dar una definición simplificada de una forma diferencial sobre una variedad diferenciable en términos de cartas. Si M es una variedad diferenciable (esto incluye el caso de una variedad compleja) que se encuentra cubierta por cartas $\varphi_j : U_j \subset V \to M$, una forma diferencial sobre M corresponde a una colección de formas diferenciales ω_j sobre cada abierto U_j, verificando la siguiente condición de compatibilidad:

$$(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j)^*(\omega_k) = \omega_j \quad \forall j, k$$

Observación importante

En espacios vectoriales, el diferencial de una función suave $f : \Omega \subset V \to W$ es una función $df : \Omega \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, ie, en cada punto su valor es una aplicación lineal que aproxima a f, y que debe pensarse como una derivada parcial en cada dirección tangente. Así, la noción de espacio tangente en un espacio vectorial es una copia de sí mismo en cada punto. Luego, una forma diferencial es una aplicación multilineal que evalúa vectores tangentes.

Es así que en el caso de una variedad diferenciable M, para definir formas diferenciales requerimos de la noción de espacio tangente T_xM en cada punto $x \in M$. Luego, una $r-$forma diferencial en M se define como una función suave:

$$\omega : M \mapsto \coprod_{x \in M} \bigwedge^{r} (T_x^* M)$$

verificando $\omega(x) \in \bigwedge^r (T_x^* M)$ para todo $x \in M$.

Definición (Cohomología de De Rham)

Sea M una variedad diferenciable. Definimos el r–ésimo grupo de cohomología de De Rham de M como el $\mathbb{C}$–espacio vectorial:

$$H^r_{dR}(M) = \frac{\{r - \text{formas complejas cerradas sobre M}\}}{\{r - \text{formas exactas}\}}$$

En este nuevo lenguaje, el Lema de Poincaré nos dice que la cohomología de un abierto estrellado es trivial.

Observación importante

La mayoría de los textos consideran únicamente formas diferenciales con valores reales. Para hacer la distinción, a veces se denota $H^r_{dR}(M, \mathbb{R})$ y $H^r_{dR}(M, \mathbb{C})$ a los grupos de cohomología de formas reales y complejas. Sin embargo, siempre se tiene que $H^r_{dR}(M, \mathbb{C}) \cong H^r_{dR}(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Proposición

Sea $F : M \to N$ una función suave entre variedades diferenciables, ω una $r-$forma diferencial sobre N. Entonces:

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$$

Demostración. Como el resultado es local y tanto d como el pullback son lineales, podemos asumir que $\omega = \omega_{j_1\dots j_r} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r}$. Entonces:

$$\begin{aligned} dF^*\left(\omega_{j_1\cdots j_r} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r}\right) &= d\left(\left(\omega_{j_1\cdots j_r} \circ F\right) dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_r}\right) \\ &= d\left(\omega_{j_1\cdots j_r} \circ F\right) dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_r} \end{aligned}$$

Por otro lado calculamos que:

$$\begin{aligned} F^* d\left(\omega_{j_1\cdots j_r} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r}\right) &= F^*\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{j_1\cdots j_r}}{\partial y_i} dy_i \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega_{j_1\cdots j_r}}{\partial y_i} \circ F\right) dF_i \wedge dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_r} \\ &= d\left(\omega_{j_1\cdots j_r} \circ F\right) \wedge dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_r} \qquad \square \end{aligned}$$

Observación

La identidad demostrada previamente significa que si $F : M \to N$ es una función suave, entonces el pullback de formas diferenciales induce una aplicación $\mathbb{C}$–lineal:

$$F^* : H^r_{dR}(N) \to H^r_{dR}(M)$$

En $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ contamos con las funciones coordenadas $dx, dy \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Sin embargo, en los números complejos es más natural considerar las coordenadas:

$$\begin{cases} dz = dx + idy \\ d\overline{z} = dx - idy \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$$

Es por esta razón que cuando nos encontremos en un espacio vectorial complejo $V \cong \mathbb{C}^n$, preferiremos utilizar las coordenadas $dz_1, d\overline{z}_1, \ldots, dz_n, d\overline{z}_n$ en vez de las coordenadas clásicas.

Formas diferenciales de tipo (p,q)

Consideremos ahora el caso en que V es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Una forma diferencial de tipo (p,q) sobre un abierto $U \subset V$ es una función suave $\omega : U \subset V \to \bigwedge^{(p,q)} V^*$. Haciendo uso de coordenadas complejas, tenemos que una forma diferencial de tipo (p,q) en $U \subset V$ se escribe como:

$$\omega(x) = \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n \\ 1 \le k_1 < \cdots < k_q \le n}} \omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}(x) dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

con $\omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q} : U \subset V \to \mathbb{C}$ funciones suaves.

Recordemos la siguiente caracterización de funciones holomorfas:

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Entonces, son equivalentes:

(1) f es holomorfa en Ω (i.e., $f \in \mathscr{O}(\Omega)$).

(2) f es $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω y $df_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal para todo $z \in \Omega$.

(3) f es $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω y se verifica la ecuación de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0 \qquad \text{en } \Omega, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Formas diferenciales en una variedad compleja

Si $F : U \subset V \to U' \subset W$ es una aplicación holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, el hecho que dF sea $\mathbb{C}$–lineal significa que el pullback de una forma de tipo (p, q) es también del mismo tipo.

Observación

Dado que en una variedad compleja los cambios de carta son holomorfos, el cálculo anterior nos dice que tiene sentido definir formas diferenciales de tipo (p, q) en variedades complejas.

Formas diferenciales en una variedad compleja

La separación de coordenadas en un espacio vectorial complejo en coordenadas holomorfas y coordenadas antiholomorfas nos da naturalmente una descomposición de la derivada exterior $d = \partial + \overline{\partial}$. Por ejemplo, para una $(1,0)$–forma $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k dz_k$ la idea es:

$$\partial\omega = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial z_j} dz_j \wedge dz_k$$

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge dz_k$$

§3. Integración de formas diferenciales

Integración de formas diferenciales

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial orientado de $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ y ω una n–forma diferencial en V con soporte compacto. Eligiendo coordenadas en V tenemos que ω se escribe como:

$$\omega(x) = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

para cierta función f suave. Definimos su integral como la expresión:

$$\int_V \omega = \int_V f(x)dx_1 \cdots dx_n$$

En el caso de una forma diferencial ω sobre una variedad diferenciable M cuyo soporte está contenido en una única carta $\varphi : U \subset M \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ podemos definir:

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

En el caso más general se consideran particiones de la unidad en M y se define por linealidad.

A continuación se presenta el resultado fundamental acerca de integración de formas diferenciales.

Teorema de Stokes

Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n y ω una $(n-1)$–forma diferencial en M con soporte compacto. Entonces:

$$\int_M d\omega = 0$$

§4. Formas diferenciales sobre un toro

Consideremos $X = V/\Gamma$ un toro complejo de dimensión n y $\pi : V \twoheadrightarrow X$ su proyección asociada. Para $\gamma \in \Gamma$ podemos considerar la traslación $\tau_\gamma : V \to V$ verifica que $\pi \circ \tau_\gamma = \pi$. De esta forma, si ω es una forma diferencial en X, su pullback $\pi^*\omega$ verifica que:

$$\tau_\gamma^*(\pi^*\omega) = (\pi \circ \tau_\gamma)^*(\omega) = \pi^*\omega \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

Lo anterior quiere expresar el hecho que una forma diferencial en X entrega una forma diferencial en V la cual es Γ–invariante, puesto que su valor no cambia por traslaciones τ_γ.

Por otro lado, si ω es una forma diferencial en V invariante por traslaciones por Γ, dado $\Omega \subset V$ tal que $\pi|_\Omega$ es una carta, tenemos que la restricción $\omega_\Omega = \omega|_\Omega$ es en particular Γ–invariante, y como los cambios de carta de X son traslaciones por Γ, esta verifica la condición de compatibilidad y luego define una forma diferencial en X.

En conclusión, las formas diferenciales en X son lo mismo que formas diferenciales sobre V que son Γ–invariantes, ie, que localmente se escriben como:

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq 2n} \omega_{j_1 \dots j_r} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

donde las funciones $\omega_{j_1 \dots j_r}$ son Γ–periódicas.

Lema

Sea ω una forma diferencial cerrada sobre un toro complejo $X = V/\Gamma$ y τ una traslación de X. La forma $\tau^*\omega - \omega$ es cerrada.

Demostración. Escribimos $X = V/\Gamma$ y $\tau(x) = x + a$ en V. Definimos:

$$\eta_a(x)(x_1, \ldots, x_{r-1}) = \int_0^1 \omega(x + ta)\,(a, x_1, \ldots, x_{r-1})\,dt,$$

Dado que ω es por definición Γ−periódica, η_a también lo es. Escribimos $\omega = \sum_j \omega_j dx_j$ verificando $\frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}$. Obtenemos así que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_a}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \sum_j \frac{\partial \omega_j(x + ta)}{\partial x_k} a_j dt = \int_0^1 \sum_j \frac{\partial \omega_k(x + ta)}{\partial x_j} a_j dt \\ &= \left[\omega_k(x + ta)\right]_{t=0}^{t=1} = \omega_k(x + a) - \omega_k(x)\end{aligned}$$

de donde $d\eta_a(x) = \sum_k \frac{\partial \eta_a}{\partial x_k}(x) dx_k = \omega(x + a) - \omega(x)$. □

Consideremos $e_1, \ldots, e_{2n} \in V$ tal que $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_{2n}$ y

$$\Pi = [0,1]e_1 \cup \cdots \cup [0,1]e_{2n}$$

Dada una función $f : V \to \mathbb{C}$ podemos definir su promedio:

$$\widetilde{f}(z) := \frac{\int_\Pi f(z+y)dy}{\int_\Pi dy}$$

Si f es una función Γ–periódica, entonces $\widetilde{f}$ es constante. Dada una forma diferencial $\omega = \sum \omega_{j_1 \ldots j_r} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$ sobre X, por la observación anterior la forma diferencial:

$$\widetilde{\omega} = \sum \widetilde{\omega}_{j_1 \ldots j_r} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

es constante.

Por el Lema anterior, sabemos que dado $y \in X$, $\tau_y^* \omega - \omega = d\eta_y$ para ciertas forma diferencial τ_y, y luego podemos calcular:

$$\widetilde{\omega}(z) - \omega(z) = \frac{\int_\Pi \left(\tau_y^* \omega(z) - \omega(z)\right) dy}{\int_\Pi dy} = \frac{\int_\Pi (d\eta_y)(z) dy}{\int_\Pi dy} = \frac{d\left(\int_\Pi \eta_y(z) dy\right)}{\int_\Pi dy}$$

Vemos así que $\omega = \widetilde{\omega}$ en $H^r_{dR}(X)$. Así, hemos visto que toda forma diferencial en X es igual en cohomología a una forma constante. Además, si integramos $\omega = \sum \omega_{j_1 \dots j_r} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}$ constante a lo largo de los caminos uniendo $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ da exactamente $\omega_{j_1 \dots j_r}$. Concluimos que:

$$H^r_{dR}(X) \cong \bigwedge^r V_{\mathbb{C}}^*$$

§5. Formas diferenciales en el espacio proyectivo

Formas diferenciales en el espacio proyectivo

Al igual que como analizamos el caso de toros complejos, una forma diferencial en $\mathbb{P}^n$ nos da una forma diferencial en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ de tal manera que sea invariante por la acción de $\mathbb{C}^*$. En coordenadas una forma diferencial de tipo (p,q) en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ es:

$$\omega = \sum \omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

El hecho que ω sea invariante por $\mathbb{C}^*$ significa que para $t \in \mathbb{C}^*$ se debe cumplir $\omega(tz) = \omega(z)$, que en coordenadas implica que:

$$\omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}(tz) = \frac{1}{t^p \overline{t}^q} \omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}(z)$$

Forma de Fubini-Study

Consideremos la siguiente forma diferencial sobre $\mathbb{P}^n$:

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \frac{\|z\|^2 \left(\sum_{j=0}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j\right) - \left(\sum_{j=0}^{n} \bar{z}_j dz_j\right) \wedge \left(\sum_{k=0}^{n} z_k d\bar{z}_k\right)}{\|z\|^4}$$

Mediante cálculo directo se puede verificar que:

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log \|z\|$$

donde $\|z\| = \sqrt{\sum z_j \bar{z}_j}$. Se puede probar que ω_{FS} es cerrada, definida positiva ($\omega_{FS}(x, ix) > 0$) y que además $\int_Z \omega_{FS} \in \mathbb{Z}$ para toda subvariedad cerrada orientada $Z \subset \mathbb{P}^n$ (entera). Tenemos entonces lo siguiente:

Si X es una variedad compleja, compacta, proyectiva, entonces posee una forma diferencial $(1, 1)$ cerrada, entera y definida positiva.