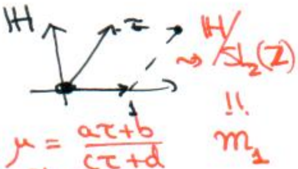
Variedades Abelianas (Semana 2): "Curvas elípticas"

Una curva elíptica es un toro complejo $E$ de $\dim_{\mathbb{C}}(E) = 1$, i.e., $E \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ con $\Gamma = \gamma_1\mathbb{Z} \oplus \gamma_2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^2$ reticulado.




Obs: Sea $\tau := \pm\gamma_1/\gamma_2$ tq $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ y $\Gamma_\tau := \tau\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\Rightarrow u : E \xrightarrow{\sim} E_\tau := \mathbb{C}/\Gamma_\tau$, $z \mapsto z/\gamma_2$. De hecho: $E_\tau \simeq E_\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

Recuerdo: Si $f : E \to \mathbb{C}$ holomorfa y elíptica (i.e., $f(z+\gamma) = f(z)$ $\forall z \in E, \forall \gamma \in \Gamma$)
$\Rightarrow f \equiv$ cte (Teo. de Liouville). ¿Qué sucede si $f$ meromorfa?

Teorema: Sea $\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left( \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$, donde $\Gamma' := \Gamma \setminus \{0\}$.
Entonces $\wp$ es una función elíptica convergente en todo compacto de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, que además es par (✓) con polos dobles en cada $\gamma \in \Gamma$ (✓).

Idea de Dem: $\wp'(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{-2}{(z-\gamma)^3}$ es elíptica y luego $\forall \gamma \in \Gamma$ existe $c(\gamma) \in \mathbb{C}$ tq $\wp(z+\gamma) = \wp(z) + c(\gamma)$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. $\underset{\wp(z) = \wp(-z)}{\overset{z = -\gamma/2}{\Longrightarrow}} c(\gamma) \equiv 0$ $\forall \gamma$ ✓ ■

Serie de Taylor / Laurent en $z_0 = 0$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left( \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{1}{(1-(z/\gamma))^2} - 1 \right)$$

Derivada de Serie geométrica

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^2} (n+1) \left(\frac{z}{\gamma}\right)^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, G_{n+2}\, z^n$$

donde $G_m := \sum_{\gamma \in \Gamma'} \frac{1}{\gamma^m}$ $\forall m \geq 3$. Como $\wp$ par: $\boxed{\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)\, G_{2k+2}\, z^{2k}}$

Prop: $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - \overbrace{60\, G_4}^{:= g_2}\, \wp(z) - \overbrace{140\, G_6}^{:= g_3}$ (★)

Dem: $\wp(z) = z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \ldots \Rightarrow \wp'(z) = -2z^{-3} + 6G_4 z + 20 G_6 z^3 + \ldots$
$\Rightarrow \wp'(z)^2 = 4z^{-6} - 24 G_4 z^{-2} - 80 G_6 + \ldots$ & $4\wp(z)^3 = 4z^{-6} + 36 G_4 z^{-2} + 60 G_6 + \ldots$
Luego, la resta de las igualdades en (★) es holomorfa & elíptica, i.e., constante $\equiv 0$ ■

⚠ Geometría Algebraica: $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) := \{$Rectas $0 \in \ell \in \mathbb{C}^3\}$. Si $\ell = \langle (x,y,z) \rangle_{\mathbb{C}}$ - ev escribimos $\ell = [x,y,z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, donde $[x,y,z] = [\lambda x, \lambda y, \lambda z]$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Identificamos $\mathbb{C}^2 := \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2$ tq $z \neq 0\}$ pues $(x,y) \mapsto [x,y,1]$ biyección
En $\mathbb{C}^2$, $u : E \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2,\ y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$, $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ es un isomorfismo de variedades complejas. Más aún, toda curva elíptica es proyectiva

$$u : E \xrightarrow{\sim} C := \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\ y^2 z = \underbrace{4x^3 - g_2 x z - g_3 z^3}\}$$

isomorfismo de variedades complejas (!) y $\Delta_E := g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$ ↑ discriminante

Obs (Jacobi): Para $E_\tau$, $\Delta_{E_\tau} = (2\pi)^{12} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24}$

¿Cómo hacer lo mismo con $V/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{Rectas } 0\in \ell \subseteq \mathbb{C}^{n+1}\}$ y $V\simeq \mathbb{C}^g$?

Buscamos funciones $\tilde u_0,\dots,\tilde u_n : V\to\mathbb{C}$ holomorfas sin ceros comunes tal que $\tilde u := (\tilde u_0,\dots,\tilde u_n): V\to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ permita definir $u: V/\Gamma \to \mathbb{P}^n \underset{\text{def}}{=} (\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$

$\iff \forall\gamma\in\Gamma,\ \exists \lambda_\gamma: V\to\mathbb{C}^*$ tq $\tilde u_j(z+\gamma)=\lambda_\gamma(z)\,\tilde u_j(z)$ $\ \forall z\in V,\ \forall j=0,\dots,n$

Def: Sea $E=\mathbb{C}/\Gamma$ curva elíptica. Una *función theta* resp. a $\Gamma$ es $\Theta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfa $\not\equiv 0$ tal que: $\forall\gamma\in\Gamma$, $\exists\, a_\gamma, b_\gamma\in\mathbb{C}$ tales que

$$\Theta(z+\gamma)=e^{2\pi i(a_\gamma z+b_\gamma)}\,\Theta(z),\quad \forall z\in\mathbb{C}. \rightsquigarrow (a_\gamma,b_\gamma) \text{ "tipo"}$$

Obs/Ejer: $\Theta$ función theta $\iff (\Theta'/\Theta)'$ elíptica, pues $(\Theta'/\Theta)(z+\gamma) = \left(\frac{\Theta'}{\Theta}\right)(z)+2\pi i\, a_\gamma$.

Así, $u: E\to\mathbb{P}^n$ equivale a $\Theta_0,\dots,\Theta_n$ sin ceros comunes del mismo tipo.

Ejemplos:

① $\Theta(z)=e^{az^2+bz+c}$ función theta que no se anula ("trivial"). Recíprocamente, si $\Theta(z)\neq 0\ \forall z\in\mathbb{C} \overset{\text{Ejercicio}}{\Longrightarrow} \Theta(z)$ es trivial (Hint: $\log|\Theta(z)|\le C_1+C_2|z|^2$).

② $\sigma(z):= z\prod_{\gamma\in\Gamma_\tau^*}\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}}$ ($\sigma$ de Weierstrass) cumple $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'=-\wp$!

③ Funciones theta de Riemann: sean $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y definamos para $\Gamma_\tau$

$$\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tau(m+a)^2+2(m+a)(z+b))} \longleftarrow \Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z;\tau)$$

donde $\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z+\tau p+q) = e^{i\pi(-2pz-p^2\tau+2pb-2aq)}\,\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z)$, i.e., para $\gamma=\tau p+q\in\Gamma_\tau$ se tiene $a_\gamma=-p$ y $b_\gamma=\frac{-p^2\tau}{2}+pb-aq$

⚠ Análisis Complejo: Si $f:E\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ meromorfa entonces, como $E$ compacto, $\sum_{x\in E}\mathrm{ord}_x(f)=0$ (⇐ Teo. de Residuos), donde $\mathrm{ord}_x(f)$ = mult. de cero / polo (negativos) en $x$.

Un *divisor* en $E$ es una "suma formal" $D=\sum_{x\in E} n_x[x]$ con $n_x\in\mathbb{Z}$ y sólo finitos $\neq 0$ y $\deg(D):=\sum_{x\in E}n_x\in\mathbb{Z}$.

Eg. Si $f:E\to\mathbb{C}\cup\{+\infty\}$ meromorfa, $\mathrm{div}(f):=\sum_{x\in E}\mathrm{ord}_x(f)[x]$ y $\deg(\mathrm{div}(f))=0$.

Obs importante: Si $\Theta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ función theta resp. a $\Gamma$ entonces $\Theta$ no induce una función en $E=\mathbb{C}/\Gamma$ pero $\mathrm{ord}_z(\Theta)=\mathrm{ord}_{z+\gamma}(\Theta)\ \forall\gamma\in\Gamma$, i.e., $\mathrm{div}(\Theta):=\sum_{x\in E}\mathrm{ord}_x(\Theta)[x]$ está bien definido.

Ejemplo: ① $\mathrm{div}(\sigma)=1\cdot[0]=[0]$. (cero simple)

② (Ejercicio) $\mathrm{div}\,\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ se obtiene al aplicar $z\mapsto z+a\tau+b$ a $\mathrm{div}\,\Theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

③ Legendre: Si $(\gamma_1,\gamma_2)$ base orientada de $\Gamma$ y $\Theta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ función theta


$\Rightarrow a_{\gamma_1}\gamma_2 - a_{\gamma_2}\gamma_1 = \deg(\mathrm{div}(\Theta))\in\mathbb{Z}$

Hint: Integrar $\Theta'/\Theta$ en el paralelogramo de lados $\gamma_1$ y $\gamma_2$.

Eg. Para $\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z;\tau)$ se tiene $a_{\tau p+q} = -q$ y así $(\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \tau)$ se tiene que $\deg^{\text{div}}\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = 0\cdot\tau - (-1)\cdot 1 = 1$. Como $\Theta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(-z) = -\Theta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(z)$ se tiene que $\text{div}\,\Theta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} = 1\cdot[0] = [0]$ y así $\text{div}\,\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = [\tau(a+1/2) + (b+1/2)]$ punto de $E = \mathbb{C}/\Gamma_\tau$ !

Similar: Para $d \in \mathbb{Z}$, $\Theta(z) := \Theta\begin{bmatrix}l/d\\0\end{bmatrix}(dz;d\tau)$, $l = 0,\dots,d-1$ verifica que $\deg\,\text{div}(\Theta) = d$.

⚠ Las funciones theta $\overbrace{\Theta_{00} := \Theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\ \Theta_{10} := \Theta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix},\ \Theta_{01} := \begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}}^{\text{pares}},\ \overbrace{\Theta_{11} := \Theta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}}^{\text{impar}}$ permiten definir

$$u : E \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad z \mapsto [\Theta_{00}(z)\Theta_{11}(z)^2, \Theta_{10}(z)\Theta_{01}(z)\Theta_{11}(z), \Theta_{00}(z)^3]$$

y $u(E) \simeq C = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2,\ y^2 z = x(\alpha x - \beta z)(\beta X + \alpha Z)\}$ con $\alpha = \dfrac{\Theta_{10}(0)^2}{\Theta_{00}(0)^2}$, $\beta = \dfrac{\Theta_{01}(0)^2}{\Theta_{00}(0)^2}$.

§ Riemann-Roch para $E = \mathbb{C}/\Gamma$:

$\text{Div}(E) :=$ grupo abeliano de divisores $\sum_{x\in E} n_x[x] \supseteq \text{Div}^0(E) :=$ div. de grado 0.

Sean $D, D' \in \text{Div}(E)$. Decimos que $D \sim D'$ si $\exists f : E \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ meromorfa tal que $D - D' = \text{div}(f)$ y sea $\text{Pic}(E) := \text{Div}(E)/\sim$ grupo abeliano cociente.

Notar que $\deg : \text{Pic}(E) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $[D] \mapsto \deg(D)$ bien definida $(\deg(\text{div}(f))=0)$ y definimos $\text{Pic}^0(E) := \ker(\deg) \overset{\text{def}}{=} \{[D] \in \text{Pic}(E),\ \deg(D) = 0\}$.

Teorema (Abel-Jacobi): $\varphi : E \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(E)$, $x \mapsto$ clase de $D = [x] - [0]$ isomorfismo.

Idea: Como $\sum_{x\in E} \text{ord}_x(f)[x] = \text{div}(f)$ tiene grado 0, $f$ elíptica no puede tener un único polo simple, i.e., $\varphi(x) = [x] - [0]$ no es principal, i.e., $\neq 0$ en $\text{Pic}^0(E)$ y así $\varphi$ inyectiva ✓. Sea $D = \sum_{x\in E} n_x[x]$ de grado 0 y notar $D \overset{\text{def}}{=} \sum_{x\in E} n_x([x]-[0]) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x\in E} n_x\varphi(x) \overset{\text{grupo}}{=} \varphi\Big(\underbrace{\textstyle\sum_{x\in E} n_x\cdot x}_{\text{operación en } (E,+)}\Big)$ ■

Def: $D = \sum_x n_x[x]$ efectivo si $n_x \geq 0\ \forall x$; $D \leq D'$ si $D' - D$ efectivo. Para $D$ divisor, definimos $L(D) := \{f : E \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ elíptica; $f = 0$ ó $\text{div}(f) + D \geq 0\}$

Eg: Si $D = 0 \Rightarrow L(D) \simeq \mathbb{C}$ funciones constantes (Liouville).

Si $D$ efectivo $\neq 0$ $L(-D) = \{0\}$ pues $\text{div}(f) - D \geq 0 \Rightarrow f$ holomorfa y se anula $\Rightarrow f \equiv 0$.

Obs: Si $g$ elíptica $\neq 0$, $L(D + \text{div}(g)) \xrightarrow{\sim} L(D)$, $f \mapsto fg$.

Teo de Riemann-Roch: Sea $D \in \text{Div}(E)$ de $\deg(D) = d \geq 1$, entonces $\dim_{\mathbb{C}} L(D) = d$.

Idea: $L(D) \simeq L(D_0)$ con $D_0 = \text{div}\,\Theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(dz;d\tau)$ y el último tiene base $\Theta\begin{bmatrix}l/d\\0\end{bmatrix}(d\,\cdot\,;d\tau)$ con $l = 0,\dots,d-1$ ■