Variedades Abelianas (Semana 1):

1. Reticulados y Toros Complejos

§1. Reticulados

Sea V un e.v. de dim n

Def: Decimos que un subgrupo Γ de V es discreto si intersecta finito con cada compacto $K \subseteq V$.

Prop: $\Gamma \leq V$ subgrupo es discreto $\Longleftrightarrow$ es cerrado y la topología inducida es la discreta.

Dem: Sea $x_n \subseteq \Gamma$ con $x_n \to \bar{x} \in V$ y notamos que $\overline{B(\bar{x},\varepsilon)} \cap \Gamma$ finito y luego $\{x_n\}$ se estabiliza y así $\bar{x} \in \Gamma$. Dado $x \in \Gamma$ $\overline{B(x,\varepsilon)} \cap \Gamma$ finito, para un radio $r > 0$ pequeño, $\overline{B}(x,r) \cap \Gamma = \{x\}$ y luego $B(x,r) \cap \Gamma = \{x\}$ ✓ Así, cada singleton es abierto y así todo conjunto es abierto ■

Teorema: Si $\Gamma \leq V$ subgrupo. Para que Γ sea discreto será necesario y suficiente que $\exists\, r \leq n$ y $\{e_1, \ldots, e_r\}$ $\mathbb{R}$-l.i. tq:
$$\Gamma = e_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus e_r\mathbb{Z}$$

Dem: Por inducción en n, consideremos $\{f_1, \ldots, f_r\} \subseteq \Gamma$ $\mathbb{R}$-l.i. con r maximal. Sea $K = \{\sum_{j=1}^{r} t_j f_j,\ 0 \leq t_j \leq 1\}$

Sea $x \in \Gamma$, existen! $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ tq $x = \sum_{i=1}^{r} x_i f_i$

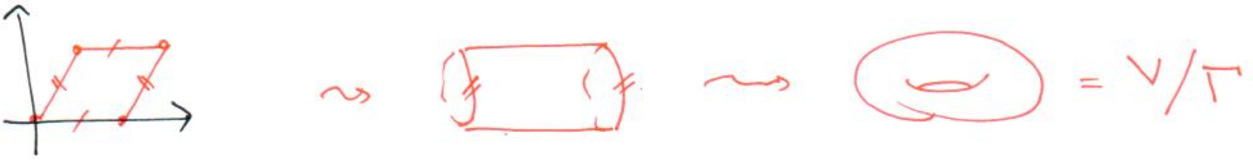
Dado $p \in \mathbb{Z}$, definimos $x^{(p)} := xp - \sum_{i=1}^{r} [px_i] f_i \in K \cap \Gamma$ por def ✓

Así, $F : \mathbb{Z} \to \underbrace{K \cap \Gamma}_{\text{finito}}$, $p \mapsto x^{(p)}$ no es inyectiva

$\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tq $x^{(p)} = x^{(q)}$, ie, $0 = x^{(p)} - x^{(q)} = \sum_{i=1}^{r} f_i (px_i - qx_i - [px_i] + [qx_i])$

$\Rightarrow (p-q)x_i = [qx_i] - [px_i] \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ y así $x_i \in \mathbb{Q}$ $\forall i$ ✓

Notar que $x = \underbrace{x^{(1)}}_{\in K \cap \Gamma} + \sum_{j=1}^{r} [x_j] f_j \Rightarrow$ El $\mathbb{Z}$-módulo Γ está finitamente generado por $f_1, \ldots, f_r$ y $K \cap \Gamma \overset{\text{Teo}}{\Rightarrow} \Gamma \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \underbrace{\cancel{\oplus\, \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}}}_{0}$ pues $\Gamma \subseteq V \cong \mathbb{R}^n$ ■



Llamamos a r, con $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^r$, el rango r.

<u>Def</u>: Un <u>retículado</u> en $V \simeq \mathbb{R}^n$ es un $\Gamma \leq V$ discreto de <u>rango n</u>.

⚠ Al cociente V/Γ, con proyección canónica $\pi : V \to V/\Gamma, x \mapsto [x]_\Gamma$, lo dotamos de la <u>topología cociente</u>: $\mathcal{U} \subseteq V/\Gamma$ se declara abierto $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto.

El Teorema implica que dado $\Gamma \leq V$ discreto

$$\Rightarrow V/\Gamma \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}/e_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}^{n-r} \simeq (S^1)^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

Así: V/Γ compacto $\Longleftrightarrow$ $r = n$.

Decimos que V/Γ es el toro real de $\dim_{\mathbb{R}}(V/\Gamma) = n$.

§2. <u>Toros complejos</u>

Sea $V \simeq \mathbb{C}^g$ e.v. complejo de dimensión g y Γ retículado de rango $2g$. Dotemos a V/Γ de estructura de variedad compleja.

<u>Def</u>: Sea $\mathcal{U} \subseteq V/\Gamma$ abierto. Decimos que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ es <u>holomorfa</u> si $f \circ \pi : V \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Notar que si $f : V/\Gamma \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces es constante (Teorema de Liouville en Análisis Complejo). Si $X := V/\Gamma$, denotamos por $\mathcal{M}(X)$ el cuerpo de funciones <u>meromorfas</u> (i.e., localmente f/g con f y g holomorfas).

<u>Def</u>: Sean E, B espacios topológicos, decimos que $p : E \to B$ sobreyectiva y continua es un <u>recubrimiento</u> si: $\forall x \in B$ $\exists$ $x \in \mathcal{U} \subseteq B$ vecindad y $\{V_\alpha\}_\alpha \subseteq E$ abiertos tq $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ homeo, V_α <u>disjuntos</u> y $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_\alpha V_\alpha$.

<u>Hecho</u>:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{u}} & V' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ V/\Gamma & \xrightarrow{u} & V'/\Gamma' \end{array} \quad \text{, i.e., } u \circ \pi = \pi' \circ \tilde{u}$$

(cf. Teorema 54.3 de Munkres).

Decimos que E es un cubrimiento universal de B si E es <u>simplemente conexo</u> (eg. V con V/Γ).

<u>Obs.</u>: Como V grupo abeliano, V/Γ es un grupo abeliano y así el toro $X = V/\Gamma$ es un <u>grupo de Lie complejo</u>.

<u>Teorema</u>: Sea $u : X = V/\Gamma \to X' = V'/\Gamma'$ es holomorfa:

① La función $\tilde{u} : V \to V'$ es afín y holomorfa.

② Si $u(0) = 0$ entonces u es morfismo de grupos de Lie y la componente conexa de $\ker(u)$ que contiene a 0, $(\ker u)^0$, es un subgrupo de Lie y es un subtoro de X. Más aún:

$$\dim(X) = \dim(\ker u)^0 + \dim \operatorname{Im}(u)$$

<u>Dem</u>: Sea $\gamma \in \Gamma$. La función $V \to \tilde{V}$, $v \mapsto \tilde{u}(v+\gamma) - \tilde{u}(v)$ tiene valores en Γ' y es <u>constante</u>. Luego, cada derivada parcial de $\tilde{u}$ es Γ-periódica y luego constante ✓ e igual a $0 \Rightarrow \tilde{u}$ <u>afín</u>.

Si $u(0) = 0$. El subgrupo $\tilde{u}(V) \cap \Gamma$ es discreto en $\tilde{u}(V)$ y es un reticulado pues Γ' es reticulado y $\tilde{u}$ <u>afín</u> (!)

La imagen de u es un subtoro $\tilde{u}(V) / (\tilde{u}(V) \cap \Gamma')$ de V'/Γ' de dim V'/Γ' de dim $\tilde{u}(V)$.

El kernel de u es $\tilde{u}^{-1}(\Gamma')/\Gamma = \pi(\tilde{u}^{-1}(\Gamma'))$. Si $W = \ker \tilde{u}$, el subgrupo $\tilde{u}^{-1}(\Gamma')/W$ de V/W es discreto (y es cerrado y $\tilde{u}$ induce la inyección continua $\tilde{u}^{-1}(\Gamma')/W \hookrightarrow \Gamma'$.

$\Rightarrow (W+\Gamma)/W$ genera V/W y es un reticulado de V/W

$\Rightarrow \tilde{u}(\Gamma')/(W+\Gamma)$ es finito y $\tilde{u}^{-1}(\Gamma')/W \,/\, (W+\Gamma)/W \cong \tilde{u}^{-1}(\Gamma')/W+\Gamma$

$$\simeq \mathbb{Z}/\tfrac{e_1}{e_1}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/\tfrac{e_g}{e_1}\mathbb{Z}$$

<u>Además</u>: $(\ker u)^0 \simeq (W+\Gamma)/\Gamma \simeq W/W \cap \Gamma$ ∎

↑ subtoro de X de dimensión dim W.