Teoría de Intersección : "3264"

¿ Cuántas cónicas $C \subseteq \mathbb{P}^2$ intersectan a las 5 cónicas $C_1, \dots, C_5 \subseteq \mathbb{P}^2$ tangentemente simultaneamente? (Para $C_1, \dots, C_5$ generales)

Cada cónica Y es de la forma $V(a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz) \subseteq \mathbb{P}^2$

$\rightsquigarrow$ Ver las cónicas como $\{\text{cónicas en } \mathbb{P}^2\} \simeq \mathcal{U}$ abierto $\hookrightarrow \mathbb{P}^5$

Consideramos $Z_i \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}^5$ el lugar de cónicas tangentes a una C_i dada.

"Queremos hallar $\operatorname{Card}(Z_1 \cap \dots \cap Z_5)$"

Sea $\Omega_i := \{(C,p) \mid C \text{ tangente a } C_i \text{ en } p\} \subseteq \mathbb{P}^5 \times C_i$

Notar que : $\underset{\shortparallel}{} V(F_i)$

- Si $p \in C_i$ entonces $pr_2^{-1}(p)$ son las cónicas tangentes a C_i en p

Localmente : $C = V(\underbrace{b_1x^2 + b_2y^2 + b_3xy + b_4x + b_5y + b_6}_{f})$. La condición de tangencia es que el gradiente ∇f verifique $\nabla F_i(p) = \lambda \nabla f(p)$

$\Rightarrow \operatorname{codim}_{\mathbb{P}^5} pr_2^{-1}(p) = 2$. y ~~luego~~ como $\dim pr_2(\Omega_i) = \dim C_i = 1$

$\Rightarrow \dim \Omega_i = 4$

- $pr_1 : \Omega_i \to \mathbb{P}^5$ que tiene $pr_1^{-1}([C])$ finito para $C \neq C_i$

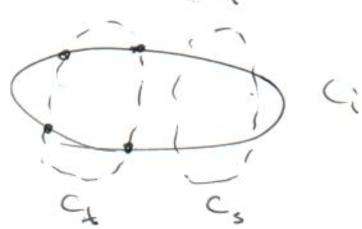
$\Rightarrow pr_1$ es un morfismo finito, sobrey. sobre su imagen $pr_1(\Omega_i) \overset{def}{=} Z_i$

$\Rightarrow \dim Z_i + 0 = \dim \Omega_i = 4$, i.e., $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^5} Z_i = 1$.

- Como Ω_i irreducible $\Rightarrow Z_i$ irreducible y luego Z_i hipersup. irreducible.

⚠ Para hallar el grado de Z_i intersectamos con una recta general en $\mathbb{P}^5$, i.e., una familia 1-dim. de cónicas : "un pincel".

Restringiendo el pincel a $C_i \simeq \mathbb{P}^1$ obtenemos una familia de grado 4 en $\mathbb{P}^1$ sin puntos base



$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{4:1} \mathbb{P}^1 = \text{pincel} \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ C_i \end{array}$$

La tangencia coincide con los puntos de ramificación !

Riemann - Hurwitz : $2g(\mathbb{P}^1) - 2 = d(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (e_p - 1)$

$\Leftrightarrow -2 = 4(-2) + \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (e_p - 1) \Rightarrow 6 = \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (e_p - 1)$

y luego $\deg(Z_i) = 6$.

Estaríamos tentados a calcular: $Z_i \sim 6H$ y luego $Z_1 \cdots Z_5 = 6^5 = 7776$.
y concluir $|Z_1 \cap \ldots \cap Z_6| = 7776$, pero <u>NO</u>.

Notar que las líneas dobles $(ax+by+cz)^2 = 0$ esquemático.

<u>Aquí</u>: $Z_1 \cap \ldots \cap Z_5 = S \sqcup \Gamma$

Γ finito (con $|\Gamma| = 3264$!)

S: <u>Veronese</u>: Pues $(ax+by+cz)^2$ está en la imagen de $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$.

Las rectas dobles están parametrizadas por $S = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ sup. de Veronese.

$\Rightarrow |\Gamma| = 6^5 -$ Exceso, con

Exceso $= \deg \prod_{i=1}^{5} c\left(N_{Z_i/\mathbb{P}^5}\big|_S\right) \cdot s\left(N_{T/\mathbb{P}^5}\right)$ donde T es S pero visto como <u>esquema</u>.

(1°) $c\left(N_{Z_i/\mathbb{P}^5}\big|_S\right)$: $c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\right) = c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(h)\right) = 1 + h$, i.e., $c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\right) = h$.

(h: recta)

<u>Hecho</u>: si $Y = V(s) \subseteq X$ ~~...~~ con $s \in H^0(X, \mathcal{L})$, $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D) \Rightarrow N_{Y/X} \cong \mathcal{L}\big|_Y$

Como $Z_i \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(6)|$, $N_{Z_i/\mathbb{P}^5} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(6)\big|_{Z_i}$

Notar que $N_{Z_i/\mathbb{P}^5}\big|_S = \nu_2^* N_{Z_i/\mathbb{P}^5} = \varphi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)} N_{Z_i/\mathbb{P}^5}$, $\nu_2 = \varphi_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)} : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$

$$= \varphi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(6) = \left(\varphi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)} \mathcal{O}(1)\right)^{\otimes 6}$$
$$= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^{\otimes 6} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(12).$$

$\Rightarrow c\left(N_{Z_i/\mathbb{P}^5}\big|_S\right) = c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(12)\right) = 1 + 12h$ y luego $\prod_{i=1}^{5} c\left(N_{Z_i/\mathbb{P}^5}\big|_S\right) = (1+12h)^5$

$= 1 + 5 \cdot 12h + 10(12h)^2 + \ldots$

$CH^\cdot(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[h]/\langle h^3 \rangle$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{5} c\left(N_{Z_i/\mathbb{P}^5}\big|_S\right) = 1 + 60h + 1440h^2$.

(2°) $s\left(N_{T/\mathbb{P}^5}\right)$: $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0$

$\Rightarrow c(T_{\mathbb{P}^n}) = (1+h)^{n+1} = 1 + (n+1)h + \ldots + (n+1)h^3$

$\Rightarrow c(T_{\mathbb{P}^2}) = 1 + 3h + 3h^2$

$s\left(N_{S/\mathbb{P}^5}\right) = c\left(N_{S/\mathbb{P}^5}\right)^{-1} = \dfrac{c(T_S)}{c\left(T_{\mathbb{P}^5}\big|_S\right)}$ por $0 \to T_S \to T_{\mathbb{P}^5}\big|_S \to N_{S/\mathbb{P}^5} \to 0$

$\varphi^*(15h^2) = 15 \cdot (2h)^2 = 60h^2$

$$= \frac{1 + 3h + 3h^2}{\varphi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)} c(T_{\mathbb{P}^5})} = \frac{1 + 3h + 3h^2}{\varphi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)}\left(1 + 6h + 15h^2\right)} = \frac{1 + 3h + 3h^2}{1 + 12h + 60h^2}$$

$= 1 - 9h + 51h^2$

El haz de ideales de T es $(\mathcal{I}_S)^2$

<u>Hecho/Def</u>: $\mathcal{E} \to X$ fibr. vect. de rg r : $s_i(\mathcal{E}) = \pi_*(\xi^{r+i})$

$$\Rightarrow s_i(\mathcal{N}_{S/\mathbb{P}^5}) = \pi_*(\xi^{r+i})$$

$$\Rightarrow s_i(\mathcal{N}_{T/\mathbb{P}^5}) = \pi_*\left((2\xi)^{r+i}\right) \overset{r=3}{=} 2^{3+i}\, s_i(\mathcal{N}_{S/\mathbb{P}^5})$$

$$\Rightarrow s(\mathcal{N}_{T/\mathbb{P}^5}) = 2^3 \cdot 1 + 2^4 \cdot (-9h) + 2^5 \cdot 51h^2 = 8 - 144h + 1632h^2$$

<u>Luego</u>:

$$\text{Exceso} = \deg\left((1 + 60h + 1440h^2)(8 - 144h + 1632h^2)\right)$$

$$= \underset{1632}{\cancel{8}} - 60 \cdot 144 + 1440 \cdot 8 = 4512$$

y así $|\Gamma| = 7776 - 4512 = 3264$ ∎