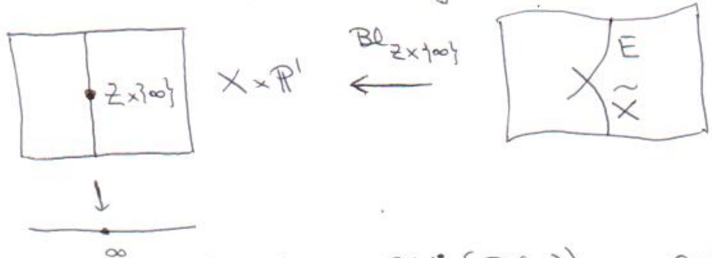
Teoría de Intersección (Fibrados proyectivos y blow-ups)

Recuerdo: La prueba de Grothendieck - Riemann - Roch se basa en entender la "Deformación al cono normal": si $Z \hookrightarrow X$ subvar, con X y Z suaves, consideramos

$M := Bl_{Z\times\{\infty\}}(X\times\mathbb{P}^1)$:



$\widetilde{X} \cong Bl_Z(X)$

$E \cong \mathbb{P}_Z(\mathcal{E})$

con $\mathcal{E} = N_{Z/X} \oplus \mathcal{O}_Z$

Todo se reduce a entender los anillos de Chow $CH^\bullet(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ y $CH^\bullet(Bl_Z(X))$.

§ Fibrados proyectivos

Sea X var. proy suave/$k=\bar{k}$ y $\mathcal{E}$ fibrado vectorial de $rg(\mathcal{E}) = r+1$. En lo que sigue:

Convención de Fulton: $\pi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) := \mathrm{Proj}_X(\mathrm{Sym}^\bullet \mathcal{E}^\vee) \to X$ fibrado proyectivo con fibras $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}_p) \cong \mathbb{P}^r$ esp. proy. de rectas en $\mathcal{E}_p$. Aquí, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ es el dual del sub fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-1) \subseteq \pi^*\mathcal{E}$

⚠ Convención de Grothendieck: $\mathbb{P}_{gr}(\mathcal{E}) := \mathrm{Proj}_X(\mathrm{Sym}^\bullet \mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$.

Def: Sea $\xi := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)) \in CH^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$. Se define las clases de Segre de $\mathcal{E}$ como $s(\mathcal{E}) = 1 + s_1(\mathcal{E}) + s_2(\mathcal{E}) + \dots \in CH^\bullet(X)$ mediante la relación

$$\pi_*(\xi^j \cdot \pi^*(\alpha_j)) = s_{j-r}(\mathcal{E}) \cdot \alpha_j \quad \forall \alpha_j \in CH_j(X)$$

Hecho (ver eg. 3264 Chapter 10):

① $c(\mathcal{E})s(\mathcal{E}) = 1$ en $CH^\bullet(X)$, ie, $s(\mathcal{E})^{-1} = c(\mathcal{E}) = 1 + c_1(\mathcal{E}) + c_2(\mathcal{E}) + \dots$

y luego $c_1 = -s_1$, $c_2 = s_1^2 - s_2$, $c_3 = -s_1^3 + 2s_1s_3 - s_3$, ..., $c_i = -s_1c_{i-1} - s_2c_{i-2} - \dots - s_i$

② (cf. Grothendieck): Como $c_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathcal{E})$ (eg. por splitting principle) se tiene $s_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i s_i(\mathcal{E})$.

③ $CH^\bullet(X) \xrightarrow{s_i(\mathcal{E})\cdot(-)} CH^\bullet(X)$ es 0 si $i \notin \{0, \dots, \dim(X)\}$ y es Id si $i = 0$.

En part, $\gamma \mapsto \pi_*(\xi^r \cdot \gamma)$ es la inversa por la izquierda del pullback $\pi^*: CH_d(X) \hookrightarrow CH_{d+r}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ y en part π^* inyectivo para todo d.

Prop: Para todo $d \in \mathbb{N}$ hay un isomorfismo de grupos

$$\Theta_d: \bigoplus_{i=0}^{r} CH_{d-r+i}(X) \xrightarrow{\sim} CH_d(\mathbb{P}(\mathcal{E})), \quad (\alpha_{d-r}, \dots, \alpha_d) \longmapsto \sum_{i=0}^{r} \xi^i \cdot \pi^*(\alpha_{d-r+i})$$

Idea de Dem: Para la inyectividad, sea $a = (\alpha_{d-r}, \dots, \alpha_d)$ con $\Theta_d(a) = 0$. Si $a \neq 0$, sea e maximal tq $\alpha_e \neq 0$. Entonces:

$$0 = \pi_*(\xi^{d-e} \cdot \Theta_d(a)) = \sum_{i\geq 0} \pi_*(\xi^{d-e+i}\, \pi^*(\alpha_{d+r-i})) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\geq 0} s_{d-e+i-r}(\mathcal{E})\, \alpha_{d-r+i}$$

Si $j = d-e+i-r$ entonces: $s_j(\mathcal{E}) \cdot \alpha_{j+e} = 0$ (resp. $= 0$, resp. α_j) si $j > 0$ pues $\alpha_{j+e} = 0$ (resp. si $j < 0$ pues $s_j(\mathcal{E}) \equiv 0$, resp. si $j = 0$ pues $s_0(\mathcal{E}) = 1$) $\Rightarrow \alpha_e = 0$ ↯

Para la sobreyectividad se usa inducción en la dim de subvar (ver eg. T. Krämer, Thm 7.1) ∎

Teorema: Hay un isomorfismo de $CH^*(X)$-álgebras
$CH^*(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \cong CH^*(X)[t]/\langle t^{r+1} + c_1(\mathcal{E})t^r + \dots + c_{r+1}(\mathcal{E})\rangle$ donde $\xi \mapsto t$.

Dem: Sea $\varphi : CH^*(X)[t] \to CH^*(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ enviando $t \mapsto \xi := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$.
Vimos que $CH^*(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \cong \bigoplus_{i=0}^{r} CH^*(X)\cdot\xi^i$ como grupos. Por otro lado, la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-1) \to \pi^*\mathcal{E} \to Q \to 0$ implica que:
$c(Q) = c(\pi^*\mathcal{E})/(1-\xi) = c(\pi^*\mathcal{E})(1+\xi+\xi^2+\dots)$, y como $rg(Q) = r$:
$0 = c_{r+1}(Q) = \xi^{r+1} + c_1(\pi^*\mathcal{E})\xi^r + \dots + c_{r+1}(\mathcal{E})$ y así $t^{r+1} + c_1(\mathcal{E})t^r + \dots + c_{r+1}(\mathcal{E}) \in \ker(\varphi)$
(y es la única relación gracias al isom. de grupos) [cf. Fulton Thm 3.3 (b)]

Ejemplo: Sea $\mathbb{F}_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ sup. de Hirzebruch, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ con $r+1 = 2$, i.e., $r = 1$. Sea $f := [\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)] = [\pi^{-1}(pt)]$ fibra de π, $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$.
Como $CH^*(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}[s]/\langle s^2\rangle$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \mapsto s$ se tiene que:
$$CH^*(\mathbb{F}_n) \cong (\mathbb{Z}[s]/\langle s^2\rangle)[t]/\langle t^2 + c_1(\mathcal{E})\cdot t + c_2(\mathcal{E})\rangle$$
Como $c(\mathcal{E}) = (1+0)(1+c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))) = 1 + c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) + 0$, $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$
y $c_2(\mathcal{E}) = 0$ (cf. $\dim \mathbb{P}^1 = 1 < 2$), dado que $\pi^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = f$ tenemos:
$$CH^*(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}[f,\xi]/\langle \xi^2 + n f\cdot\xi, f^2\rangle \text{ y así:}$$
$$CH^0(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z},\quad CH^1(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}[f] \oplus \mathbb{Z}[\xi] \cong \mathbb{Z},\quad CH^2(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}[f\cdot\xi] \cong \mathbb{Z}$$
y con ello: $\xi\cdot f = f\cdot\xi = 1$, $f^2 = 0$, $\xi^2 = -n\,\xi\cdot f = -n$.

Similar: Si $X_{a,b} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b))$ entonces $CH^*(X_{a,b}) = \mathbb{Z}[f,\xi]/\langle \xi^3 + (a+b)f\xi^2, f^2\rangle$

Obs (Clases de Chern de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$): Las sucesiones exactas
$0 \to T_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X} =: \ker(d\pi) \hookrightarrow T_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \xrightarrow{d\pi} \pi^*T_X \to 0$ y
$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \hookrightarrow \pi^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \to T_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X} \to 0$ (Euler relativa)
implican $c(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \pi^*c(X)\cdot c(\pi^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$ y donde (por splitting principle) $c_i(\pi^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)) = \sum_{j=0}^{i} \binom{r+1-i+j}{j} \pi^* c_{i-j}(\mathcal{E})\cdot\xi^j$.

§ Blow-ups

En lo que sigue consideraremos la siguiente situación:
X var proy suave $/k = \bar{k}$ y $Z \xrightarrow{i} X$ subvar suave de $\operatorname{codim}_X(Z) = c$.
Sea $E \cong \mathbb{P}_Z(N_{Z/X}) \xrightarrow{g} Z$ divisor excepcional del blow-up $f : \tilde{X} = Bl_Z(X) \to X$
Así, hay un diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "g"', "\mathbb{P}^{c-1}\text{-fibrado (flat)}"'] & \tilde{X} = Bl_Z(X) \arrow[d, "f", "\text{(propio)}"] \\ Z \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

<u>Teorema</u>: Con la notación anterior, todo elemento de $CH^*(Bl_Z(X))$ es de la forma $f^*(x)+j_*(e)$ con $x\in CH^*(X)$ y $e \in CH^*(E)$. Además, la estructura de anillo está dada por:

① $f^*(x)\cdot f^*(x') = f^*(x\cdot x')$

② $f^*(x)\cdot j_*(e) = j_*(e\cdot g^* i^* x) \overset{\text{def}}{=} j_*(e\cdot g^*(x|_Z))$

③ $j_*(e)\cdot j_*(e') = -j_*(e\cdot e'\cdot \xi)$ con $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Z/X})}(1)) = -j^*([E])$.

<u>Dem</u>: Por Excisión, tenemos
$$\begin{tikzcd} CH_*(X) \arrow[r, "j_*"] & CH_*(\tilde{X}) \arrow[r, "\text{restr}=\tilde{\rho}"] & CH_*(\tilde{X}\setminus E) \arrow[r] & 0 \\ & CH_*(X) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\text{restr}=\rho"] & CH_*(X\setminus Z) \arrow[u, phantom, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Así, $\tilde{x}\in CH^*(\tilde{X})$ cumple $\tilde{x}-f^*f_*(\tilde{x}) \in \ker(\tilde{\rho})$ (pues la diferencia consiste en ciclos soportados en E), i.e., $\tilde{x}-f^*f_*(\tilde{x}) \in \mathrm{Im}(j_*)$ por exactitud $\Rightarrow \tilde{x} = f^*(\underbrace{f_*(\tilde{x})}_{x}) + j_*(\exists e)$ ✓

Además: ① OK pues f^* morfismo de anillos ✓ Para ② usamos fórmula de proyección:
$f^*(x)\cdot j_*(e) \overset{\text{proy}}{=} j_*(e\cdot j^*f^*(x)) = j_*(e\cdot (f\circ j)^*(x)) = j_*(e\cdot (i\circ g)^*(x))$ ✓

Para ③: $j^*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)|_E \cong N_{E/\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Z/X})}(-1)$ y así $j^*[E] = c_1(N_{E/\tilde{X}}) = -\xi$.

Además, como $j: E \hookrightarrow \tilde{X}$ inclusión de un <u>divisor</u> entonces (ver Fulton Prop 2.6).
$$j_*j^*(\tilde{x}) = c_1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E))\cdot \tilde{x} \quad \forall \tilde{x}\in CH^*(\tilde{X}) \qquad \text{y} \qquad j^*j_*(e) = j^*(c_1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)))\cdot e = -\xi\cdot e \quad \forall e \in CH^*(E)$$

Proyección: $\varphi_*(\alpha)\cdot\beta = \varphi_*(\alpha\cdot\varphi^*\beta)$

y luego: $j_*(e)\cdot j_*(e') \underset{\text{proy}}{=} j_*(e\cdot j^*j_*(e')) = -j_*(e\cdot e'\cdot\xi)$ ■

<u>Observación útil</u>: Notar que $j_*(1) \overset{\text{def}}{=} [E] \in CH^1(\tilde{X})$ y luego:
$$[E]^m = j_*(1)\cdot [E]^{m-1} \overset{\text{proy}}{=} j_*(1\cdot j^*[E]^{m-1}) \overset{③}{=} (-1)^{m-1} j_*(\xi^{m-1}).$$
Luego; para $x\in CH^*(X)$ se tiene $[E]^m\cdot f^*(x) = (-1)^{m-1} j_*(\xi^{m-1}\cdot g^*(x|_Z))$ pues:
$$[E]^m\cdot f^*(x) = (-1)^{m-1} j_*(\xi^{m-1})\cdot f^*(x) = (-1)^{m-1} j_*(\xi^{m-1}\cdot j^*f^*(x)) = (-1)^{m-1} j_*(\xi^{m-1}\cdot g^*(x|_Z))$$

⚠ Si $x\in CH_m(X)$ entonces $[E]^m\cdot f^*(x) \in \mathbb{Z}$ y si $m < c = \mathrm{codim}_X(Z)$ entonces $x|_Z = 0$, y si $m > c$ entonces $\xi^{m-1} = 0$ pues $\mathrm{rg}(N_{Z/X}) = c$. Así, sólo se requiere calcular $[E]^c\cdot f^*(x)$ para $x\in CH_c(X)$ con $x|_Z \neq 0$.

<u>Hecho</u>: Para hacer cálculos en $Bl_Z(X)$ (eg. HRR) se usa mucho (ver Fulton Prop. 6.7 y "Enumerative Geom. and String Theory", Chap. 8, por S. Katz):

① <u>Exceso</u>: Sea $z\in CH^*(Z)$ y $\mathcal{B} := g^*N_{Z/X}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Z/X})}(-1)$ "excess bundle". Entonces:
$$f^*i_*(z) = j_*(c_{c-1}(\mathcal{B})\cdot g^*(z)) \text{ en } CH^*(\tilde{X})$$

② <u>Clases de Chern de $Bl_Z(X)$</u> (ver Fulton §15.4): $c(\tilde{X}) - f^*c(X) = j_*(g^*c(Z)\cdot\alpha)$
con $\alpha = \frac{1}{\xi}\left[\sum_{i=0}^{c} g^*c_{c-i}(N_{Z/X}) - (1-\xi)\sum_{i=0}^{c}(1+\xi)^i g^*c_{c-i}(N_{Z/X})\right] = \sum_{j=0}^{c}\sum_{k=0}^{c-j}\left(\binom{c-j}{k} - \binom{c-j}{k+1}\right)\xi^k\cdot g^*c_j(N_{Z/X})$
donde $\binom{p}{q} := 0$ si $p<q$.

<u>Cultura general</u>: En el artículo "Une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz", Jean-Paul Brasselet (1974) calcula las clases de Chern de cubrientes ramificados.

§ Aplicación: Geometría birracional de 3-folds

Sea X 3-fold proy suave$/\mathbb{C}$ y D divisor en X, entonces por Hirzebruch-Riemann-Roch:

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(D)) = \chi(X,\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left((-K_X)^2\cdot D\right) + \frac{1}{12}\left(D\cdot c_2(X)\right) + \frac{1}{4}\left(-K_X\cdot D^2\right) + \frac{1}{6}D^3$$

donde $\chi(X,\mathcal{O}_X) = \frac{1}{24}\left(-K_X\cdot c_2(X)\right)$ (cf. Teo de Noether para superficies)

Además, si X Fano (ie, $-K_X$ amplio) entonces $\chi(X,\mathcal{O}_X) = 1$ por anulación de Kodaira.

En este caso, si $\sigma : \widetilde{X} = Bl_Z(X) \to X$ blow-up de $Z \subseteq X$ subvar suave con div. excepcional $E \subseteq \widetilde{X}$, entonces la discusión anterior implica:

① Si $Z = p \in X$ punto y $D \in CH^1(X)$ divisor, entonces:

$K_{\widetilde{X}} = \sigma^* K_X + 2E$ y $c_2(\widetilde{X}) = \sigma^* c_2(X)$ y además

$\sigma^*(D)^3 = D^3$, $\sigma^*(D)^2\cdot E = 0$, $\sigma^*(D)\, E^2 = 0$, $E^3 = 1$.

② Si $Z = C \subseteq X$ curva de género g y $f \in CH^2(\widetilde{X})$ es la clase de una fibra del $\mathbb{P}^1$-fibrado $g = \sigma|_E : E \to C$ y $D \in CH^1(X)$, entonces:

$K_{\widetilde{X}} = \sigma^* K_X + E$ y $c_2(\widetilde{X}) = \sigma^*(c_2(X) + C) + \sigma^* K_X \cdot E$ y además

$\sigma^*(D)^3 = D^3$, $\sigma^*(D)^2\cdot E = 0$, $\sigma^*(D)\cdot E^2 = -D\cdot C$, $E^3 = K_X\cdot C + 2 - 2g(C)$

donde $\deg(N_{C/X}) = -K_X\cdot C + 2g - 2$.

Ejemplo (ver T. Fujita "On the structure of polarized manifolds with total deficiency one II")

Sea $G = Gr(2,5) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^5) \cong \mathbb{P}^9$ con $\mathcal{O}_G(-K_G) \simeq \mathcal{O}_G(5)$. Por adjunción, si $X = G\cap H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subseteq \mathbb{P}^6$ sección lineal gral, entonces X Fano 3-fold con $-K_X = 2H$ y $H^3 = 5$ (por cálculo de Schubert), y $Pic(X) = \mathbb{Z}[H]$.

[Obs: Si tomamos otra sección hiperplana general, $dP_5 \cong S \subseteq X$ del Pezzo de grado 5 y luego $\exists\, l \subseteq X$ recta en X. Aquí, se calcula $\deg(N_{l/X}) = -K_X\cdot l + 2g(l) - 2 = 2H\cdot l - 2 = 0$, ie, $c_1(N_{l/X}) = 0$.

Sea $\widetilde{X} = Bl_l(X) \xrightarrow{\sigma} X$ y sea $D = \sigma^* H - E$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\varphi = \varphi_{|D|}"] & \\
\mathbb{P}(V_2) = l \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^6 \arrow[rr, dashed, "\pi_l"] & & Y \subseteq \mathbb{P}(V_7/V_2) = \mathbb{P}^4
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}(V_7)$$

¿Qué podemos decir de Y y de φ?

Por otro lado, si $D = \sigma^* H - E$ entonces $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D) \overset{def}{=} \varphi^*(\mathcal{O}_Y(1))$ y por otro lado,

$$D^3 = (\sigma^* H - E) = \underbrace{\sigma^*(H)^3}_{H^3 = 5} - 3\underbrace{\sigma^*(H)^2 E}_{=0} + 3\underbrace{\sigma^*(H)\cdot E^2}_{= -H\cdot l = -1} - \underbrace{E^3}_{= -\deg(N_{l/X}) = 0} = 2$$

En part, como $D^3 = \varphi^*\mathcal{O}_Y(1)^3 = 2 \neq 0$, se tiene que $\dim(Y) = 3$.

Sea $d = \deg_{\mathbb{P}^4}(Y)$, entonces $\varphi^*\mathcal{O}_Y(1)^3 = 2 = d \cdot \deg(\varphi)$.

Como $X \not\cong \mathbb{P}^3$ se puede probar que $d \geq 2$ y con ello $d = 2$ y $\deg(\varphi) = 1$, y además Y es suave, i.e., $Y \cong Q^3 \subseteq \mathbb{P}^4$ cuádrica y φ birracional.

Sea $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ generador amplio, con $-K_Y = 3L$ y $L^3 = 2$: ~~[illegible]~~

i) Se calcula $D^2 \cdot \sigma^* H = 4$ y $D^2 \cdot E = 2$ y así: ~~[illegible]~~ $h^0(E, D|_E) \overset{RR}{=} 4$ y $\varphi(E)$ cuádrica en $Y \cong Q^3$. (y en part $\varphi(E)$ div. amplio).

ii) Sea $C \subseteq Y$ el centro del blow-up $\varphi : \tilde{X} \to Y \cong Q^3$ entonces C es una curva suave (si $C = \{pt\}$ entonces $\tilde{X} \cong Bl_p Q^3 \cong Bl_{\text{cónica}}(\mathbb{P}^3) \Rightarrow X \cong \mathbb{P}^3$ $\lightning$)

iii) Por (i) y (ii), $\varphi(E) \cap C \neq \emptyset$ y luego $\varphi^* L = E + R$ para cierto $R \in |\sigma^* H - 2H|$. (Obs: $D^2 \cdot R = 0$ ✓ $\Rightarrow \dim(C) < 2$ ✓).

iv) Si F fibra general de $R \xrightarrow{\mathbb{P}^1\text{-fibr}} C$ y $e = \deg_{\mathbb{P}^4}(C) = L \cdot C$ entonces: $e \cdot \varphi^* L \cdot F = L \cdot D \cdot R = 3 \underset{e>1}{\Longrightarrow} e = 3$ y $F \cdot \varphi^* L = 1$.

De esto, se deduce que $C \subseteq \mathbb{P}^3 \subseteq \mathbb{P}^4$ twisted cubic, i.e., hay un "link de Sarkisov":

$$
\begin{tikzcd}
 & Bl_\ell(X) \cong Bl_C(Q^3) \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X \subseteq \mathbb{P}^6 \arrow[rr, dashed, "\pi_\ell"] & & Q^3 \subseteq \mathbb{P}^4 \\
\cup\!\text{l} & & \cup\!\text{l} \\
\ell \cong \mathbb{P}^1 \text{ recta} & & C \text{ twisted cubic}
\end{tikzcd}
$$

En part, X es racional.