Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch

§1. Clases de Todd

Recordemos primero algunos teoremas de Riemann-Roch

(1) Hirzebruch-Riemann-Roch para curvas: Sea E v.b., $\mathrm{rk}(E)=r$ sobre C curva de género g

$$\chi(C,E) = \deg(E) + r(1-g) = \deg(\underbrace{\Lambda^r E}_{c_1(E)}) - \frac{r}{2}\deg(\underbrace{K_C}_{c_1(T_C^\vee)})$$

$$= \int_C c_1(E) + \frac{r}{2} c_1(T_C) .$$

(2) Riemann-Roch para superficies: Sea S superficie (proy. suave) y L un l.b., $L = \mathcal{O}_S(D)$

$$\chi(S,L) = \underbrace{\chi(S,\mathcal{O}_S)} + \frac{1}{2}(D^2 - D\cdot K_S)$$

$$\overset{\text{Noether}}{=} \frac{K_S^2 + \chi_{top}(S)}{12} + \frac{1}{2}\int_S c_1(L)^2 + c_1(L)\cdot c_1(T_S)$$

$$\overset{\text{Gauss-Bonnet}}{=} \int_S \frac{c_1(T_S)^2 + c_2(T_S)}{12} + \frac{c_1(L)^2 + c_1(L)\cdot c_1(T_S)}{2}$$

El teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch que buscamos es de la forma: Sea X var. proy. suave y E v.b.

$$\chi(X,E) = \int_X ch(E)\cdot td(T_X)$$

donde $ch(E)$ es el llamado carácter de Chern de E y se define como

$$ch(E) := \sum_{i=1}^r \exp(\alpha_i) \in A(X) , \quad r = \mathrm{rk}(E)$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A^1(X)$ son las raíces de Chern de E i.e. son tales que $c_j(E) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le r} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_j}$

$$c_t(E) = 1 + c_1(E)t + c_2(E)t + \dots + c_r(E)t = \prod_{i=1}^r (1+\alpha_i t) = \prod_{i=1}^r c_t(L_i)$$

donde $E = E_r \supseteq E_{r-1} \supseteq \dots \supseteq E_0 = 0$ es filtración de v.b. dados por el "splitting principle" y $L_i = E_i/E_{i-1}$.

Para $\alpha \in A(X)$ se define

$$\exp(\alpha) := \sum_{k\ge 0} \frac{\alpha^k}{k!} \in A(X).$$

Con esta definición es claro que ch es aditiva

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad ch(E) = ch(E_1) + ch(E_2).$$

Luego $\int_X ch(E)\cdot td(T_X)$ es también aditiva, al igual que $\chi(X,E)$. Por otro lado, la característica de Euler es además multiplicativa

$$\chi(X\times Y, E\boxtimes F) = \chi(X,E)\cdot\chi(Y,F) \quad , \text{ donde } E\boxtimes F := pr_1^*E \otimes pr_2^*F.$$

Notando que $T_{X\times Y} = T_X \oplus T_Y$ entonces, si tuviéramos que

$$td(T_X\oplus T_Y) = td(T_X)\cdot td(T_Y)$$

entonces

$$\int_{X\times Y} ch(E\boxtimes F)\, td(T_{X\times Y}) = \int_{X\times Y} \sum_{i,j} \underbrace{\exp(\alpha_i \beta_j)}_{\exp(\alpha_i)\exp(\beta_j)}\, td(T_X)\, td(T_Y) = \int_{X\times Y} ch(E)\, ch(F)\, td(T_X)\, td(T_Y)$$

es también multiplicativa.

<u>Prop</u>: Existe un único $F \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ tal que para todo v.b. E sobre una var. proy. suave X

$$td(E) = F(c_1(E), c_2(E), \dots) \in A(X)_{\mathbb{Q}}$$

satisface: (a) $td(E\oplus F) = td(E)\cdot td(F)$,

(b) $td(\mathcal{O}_X) = 1$,

(c) $\chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \int_{\mathbb{P}^n} ch(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})\cdot td(T_{\mathbb{P}^n})$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Explícitamente

$$td(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{1-\exp(-\alpha_i)} \quad \text{para } \alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ las raíces de Chern de } E.$$

Dem: Si existe F, entonces por "splitting principle"

$$td(E) = \prod_{i=1}^{r} f(\alpha_i) \quad , \text{ con } f(t) = F(t, 0, \dots) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

De la secuencia de Euler sigue que

$$td(T_{\mathbb{P}^n}) = td(T_{\mathbb{P}^n})\cdot td(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = td(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1} = f(\xi)^{n+1}, \quad \xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \int_{\mathbb{P}^n} f(\xi)^{n+1} \quad , \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$$\rightarrow \quad 1 = \operatorname{Res}\left(\frac{f(t)^{n+1}dt}{t^{n+1}}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{dt}{g(t)^{n+1}}, 0\right) \quad , g(t) = \frac{t}{f(t)} \quad , t \overset{TFI}{=} h(\underbrace{g(t)}_{s})$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{h'(s)\,ds}{s^{n+1}}, 0\right) = n\cdot a_n \quad , h(s) = a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad h(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{s^n}{n} = -\log(1-s) \Rightarrow g(t) = 1-\exp(-t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t}{1-\exp(-t)} \in \mathbb{Q}[[t]] \quad // \quad \square$$

La serie de potencias

$$f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}} = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{i\geq 1} (-1)^{i+1} \frac{B_{2i}}{(2i)!} t^{2i} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{720}t^4 + \dots$$

donde $B_{2i} \in \mathbb{Q}$ son los <u>números de Bernoulli</u> que satisfacen $B_0 = 1$ y $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$ para $n > 1$.

Luego

$$td(E) = \prod_{i=1}^{r} f(\alpha_i) = 1 + \frac{c_1(E)}{2} + \frac{c_1(E)^2 + c_2(E)}{12} + \frac{c_1(E) \cdot c_2(E)}{24} + \dots$$

<u>Lema</u>: Si $rk(E) = r$ entonces

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j ch(\Lambda^j E^\vee) = c_r(E) \cdot td(E)^{-1}$$

<u>Dem</u>: Las raíces de Chern de $\Lambda^j E^\vee$ son de la forma $-\alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_j}$ luego

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j ch(\Lambda^j E^\vee) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \sum_{i_1 < \dots < i_j} \exp(-\alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_j}) = \prod_{i=1}^{r} (1 - \exp(-\alpha_i)) = \underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{c_r(E)} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{r} \frac{1-\exp(-\alpha_i)}{\alpha_i}}_{td(E)^{-1}} \quad // \quad \square$$

<u>Obs</u>: Para el Hirzebruch-Riemann-Roch también necesitamos escribir el carácter de Chern en términos de las clases de Chern

$$ch(E) = \sum_{i=1}^{r} \exp(\alpha_i) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha_1^n + \dots + \alpha_r^n)}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n}{n!}$$

$$p_n = \det \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2c_2 & c_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 3c_3 & c_2 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ n c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \end{pmatrix}$$

lo que nos da $$ch(E) = r + c_1(E) + \frac{c_1(E)^2 - 2c_2(E)}{2} + \frac{c_1(E)^3 - 3c_1(E)c_2(E) + 3c_3(E)}{6} + \dots$$

de donde ya podemos recuperar las primeras versiones de Riemann-Roch.

§2. Grupos de Grothendieck

Def: Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, el grupo de Grothendieck $K(\mathcal{A})$ es el cociente del grupo libre abeliano generado por clases de isomorfismo $[E]$ de objetos $E \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ módulo relaciones

$$[E] = [E_1] + [E_2] \quad \text{para cada secuencia exacta corta} \quad 0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0 \ \text{en } \mathcal{A}.$$

Para X un esquema denotamos

$$K^0(X) = K(VB(X)) \quad \text{y} \quad K_0(X) = K(\mathrm{Coh}(X)).$$

Obs: Para X esquema tenemos

(a) $K^0(X)$ es un anillo respecto al producto

$$K^0(X) \times K^0(X) \longrightarrow K^0(X), \quad [E]\cdot[F] := [E \otimes F]$$

y para $f: X \to Y$ morfismo tenemos un morfismo de anillos

$$f^*: K^0(Y) \to K^0(X)$$
$$[E] \mapsto [f^*(E)]$$

(b) $K_0(X)$ es un $K^0(X)$-módulo con producto escalar

$$K^0(X) \times K_0(X) \to K_0(X)$$
$$([E],[\mathcal{F}]) \mapsto [E]\cdot[\mathcal{F}] := [E \otimes \mathcal{F}].$$

Para cualquier morfismo propio $f: X \to Y$ tenemos

$$f_*: K_0(X) \to K_0(Y)$$
$$[\mathcal{F}] \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i [R^i f_* \mathcal{F}]$$

y vale la fórmula de la proyección

$$f_*(f^*(\alpha)\cdot\beta) = \alpha \cdot f_*(\beta) \qquad \forall \alpha \in K^0(Y), \forall \beta \in K_0(X).$$

Prop: El funtor olvido $VB(X) \to \mathrm{Coh}(X)$ es exacto e induce un morfismo

$$K^0(X) \to K_0(X)$$

llamado el mapa dualidad (análogo al de dualidad de Poincaré) y es un isomorfismo si X es variedad suave cuasi-proyectiva.

Dem: Hilbert syzygy. // $\square$

Ej: $K(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[T]/\langle T^{n+1}\rangle$, $T = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)]$

§3. Grothendieck-Riemann-Roch

Sea X variedad proyectiva suave, consideramos

$$\tau_X : K(X) \longrightarrow A(X)_{\mathbb{Q}}$$
$$[E] \longmapsto ch(E)\cdot td(T_X)$$

queremos probar que

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\tau_X"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\ A(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\int_X"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Prop.: Para $X = \mathbb{P}^n$ tenemos $\chi(E) = \int_{\mathbb{P}^n} ch(E)\cdot td(T_{\mathbb{P}^n})$, $\forall [E] \in K(\mathbb{P}^n)$.

Dem: Basta probarlo para $E = \mathcal{O}(m)$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tenemos que para $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$

$$ch(E) = \exp(m\xi) \quad , \quad td(T_{\mathbb{P}^n}) = td(\mathcal{O}(1))^{n+1} = \left(\frac{\xi}{1-\exp(-\xi)}\right)^{n+1}$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{P}^n} ch(E)\cdot td(T_{\mathbb{P}^n}) = \text{Coef de } \xi^n \text{ en } e^{m\xi}\cdot\frac{\xi^{n+1}}{(1-e^{-\xi})^{n+1}}$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{mx}\,dx}{(1-e^{-x})^{n+1}}, 0\right) \underset{y=1-e^{-x}}{=} \operatorname{Res}\left(\frac{(1-y)^{-(m+1)}\,dy}{y^{n+1}}, 0\right) = \binom{m+n}{n} = \chi(\mathcal{O}(m)) \quad // \square$$

Para X una variedad proyectiva suave, sea $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ un encaje, luego tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\tau_X"'] & K(\mathbb{P}^n) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\tau_{\mathbb{P}^n}"] & \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\ A(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "i_*"'] & A(\mathbb{P}^n)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\int_{\mathbb{P}^n}"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

entonces si mostramos la conmutatividad del diagrama a la izquierda se concluye Hirzebruch-Riemann-Roch.

Teorema: (Grothendieck-Riemann-Roch) Sea $f : X \to Y$ cualquier morfismo proyectivo entre variedades suaves cuasi-proy. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\tau_X"'] & K(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ A(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "f_*"'] & A(Y)_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

La idea de la demostración es factorizar

$$f : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^n \longrightarrow Y$$

así, nos basta demostrarlo para f un encaje cerrado y para $f = pr_1 : Y \times \mathbb{P}^n \to Y$.

<u>Paso 1</u>: $f = pr_1 : Y \times \mathbb{P}^n \to Y$.

- Tenemos que $K(\mathbb{P}^n) \otimes K(Y) \overset{\boxtimes}{\twoheadrightarrow} K(\mathbb{P}^n \times Y)$ es sobreyectiva, sigue por inducción en n (sec. localización).
- Luego como τ_X es multiplicativa entonces el cuadrado exterior del siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbb{P}^n) \otimes K(Y) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\boxtimes"'] & K(pt) \otimes K(Y) \arrow[d, "\wr"] \\
K(\mathbb{P}^n \times Y) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[d, "\tau_{\mathbb{P}^n \times Y}"'] & K(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\
A(\mathbb{P}^n \times Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "f_*"'] & A(Y)_{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

y como el cuadrado superior también conmuta, entonces el cuadrado inferior conmuta. // $\square$

<u>Paso 2</u>: $f : X \hookrightarrow N \hookrightarrow \mathbb{P}(N \oplus \mathcal{O}_X) = Y$ donde N es v.b. de rango d sobre X, $X \hookrightarrow N$ es la sección nula y $N \hookrightarrow \mathbb{P}(N \oplus \mathcal{O})$ es la inmersión abierta canónica. Sea $p : Y \to X$ la proyección de fibrado, sea

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N \oplus \mathcal{O})}(-1) \to p^*(N \oplus \mathcal{O}) \to Q \to 0$$

el fibrado cociente tautológico, y sea

$$s : \mathcal{O}_Y \hookrightarrow p^*N \oplus \mathcal{O}_Y \to Q$$

una sección de Q determinada por la inclusión de $\mathcal{O}_Y$ en el segundo factor. Luego $Z(s) = X$ y entonces el complejo de Koszul determinado por s es una resolución de $f_*\mathcal{O}_X$:

$$0 \to \Lambda^d Q^\vee \to \cdots \to \Lambda^2 Q^\vee \to Q^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X \to 0$$

$$\Rightarrow ch(f_*\mathcal{O}_X) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i ch(\Lambda^i Q^\vee) = c_d(Q) \cdot td(Q)^{-1} = [X] \cdot td(Q)^{-1}$$

Como por la fórmula de proyección

$$f_* E \simeq f_*(f^* p^* E) \simeq f_*\mathcal{O}_X \otimes p^* E$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow ch(f_* E) &= ch(f_*\mathcal{O}_X) \cdot ch(p^* E) = [X] \cdot td(Q)^{-1} \cdot ch(p^* E) \\
&= f_* f^*(td(Q)^{-1} \cdot ch(p^* E)) = f_*(td(f^* Q)^{-1} \cdot ch(f^* p^* E)) \\
&= f_*(td(N)^{-1} \cdot ch(E)) = f_*(f^*(td(T_Y))^{-1} \cdot td(T_X) \cdot ch(E)) \\
&= td(T_Y)^{-1} \cdot f_*(td(T_X) \cdot ch(E)). \quad // \ \square
\end{aligned}$$

Paso 3: $f : X \hookrightarrow Y$ inmersión cerrada cualquiera.

Hacemos la construcción de "deformación al cono normal" (ver charla siguiente)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "g_\infty"] \arrow[d, hook, "i_\infty"'] & \tilde{Y} \cup \mathbb{P}(N\oplus\mathcal{O}) = M_\infty \arrow[r] \arrow[d, hook, "I_\infty"] & \{\infty\} \arrow[d, hook] \\
X\times\mathbb{P}^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "p"] & \underset{M}{Bl_{X\times\{\infty\}}(Y\times\mathbb{P}^1)} \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \\
X \arrow[r, hook, "g_0 = f"] \arrow[u, hook, shift left, "i_0"] & Y = M_0 \arrow[r] \arrow[u, hook, "I_0"] & \{0\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

con $N = N_{X/Y}$ el fibrado normal.

Dado v.b. E en X sea $\tilde{E} = p^*E$ en $X\times\mathbb{P}^1$ y tome una resolución localmente libre en M

$$0 \to G_m \to G_{m-1} \to \dots \to G_0 \to g_*\tilde{E} \to 0$$

Por planitud permanece exacta en M_0 y M_∞, luego $G_\bullet|_{M_0} \to f_*E \to 0$ es resolución. Entonces

$$I_{0*}(ch(f_*E)) = I_{0*}\Big(\sum_{i\geq 0}(-1)^i ch(G_i|_{M_0})\Big) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i ch(G_i)\cdot[M_0]$$

$$= \sum_{i\geq 0}(-1)^i ch(G_i)\cdot[M_\infty] = \sum_{i\geq 0}(-1)^i ch(G_i)\cdot([\mathbb{P}(N\oplus\mathcal{O})]+[\tilde{Y}])$$

$$= a_*\Big(\sum_{i\geq 0}(-1)^i ch(G_i|_{\mathbb{P}(N\oplus\mathcal{O})})\Big) + b_*\Big(\sum_{i\geq 0}(-1)^i ch(G_i|_{\tilde{Y}})\Big)$$

donde $a : \mathbb{P}(N\oplus\mathcal{O}) \hookrightarrow M$ y $b : \tilde{Y} \hookrightarrow M$. Como $g_\infty(X) \cap \tilde{Y} = \emptyset$ sigue que $G_\bullet|_{\mathbb{P}(N\oplus\mathcal{O})} \to g_{\infty *}E \to 0$ es resolución

$$\Rightarrow I_{0*}(ch(f_*E)) = a_*(ch(g_{\infty *}E)) = a_* g_{\infty *}(td(N)^{-1}\cdot ch(E))$$

Considerando $q : Bl_{X\times\{\infty\}}(Y\times\mathbb{P}^1) \to Y\times\mathbb{P}^1 \to Y$ y aplicando q_* obtenemos

$$ch(f_*E) = (q\circ a\circ g_\infty)_*(td(N)^{-1}\cdot ch(E)) = f_*(td(N)^{-1}\cdot ch(E)). \quad \square$$

Cor: (Hirzebruch-Riemann-Roch) X variedad proyectiva suave y E v.b.

$$\chi(X,E) = \int_X ch(E)\cdot td(T_X).$$

Cor: (Gauss-Bonnet) X var. proy. suave de dim. d

$$\chi_{top}(X) = \int_X c_d(T_X).$$

Dem: $$\chi_{top}(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim H^i(X,\mathbb{C}) = \sum_{p,q\geq 0}(-1)^{p+q}\dim H^q(X,\Omega^p_X) = \sum_{p\geq 0}(-1)^p \chi(X,\Omega^p_X)$$

$$= \int_X \sum_{p\geq 0}(-1)^p ch(\Omega^p_X)\cdot td(T_X) = \int_X c_d(T_X)\cdot td(T_X)^{-1}\cdot td(T_X) = \int_X c_d(T_X). \quad \square$$