

SEMINARIO TEORÍA DE INTERSECCIÓN

SESIÓN 2 : ANILLO DE CHOW

ORGANIZADORES : PEDRO MONTERO, ROBERTO VILLAFLORES NOTAS : MATEO HIDALGO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

1 El Anillo de Chow

Referencia principal : "Intersection Theory in Algebraic Geometry" por Francois Greer / $\mathbb{C}$.

Desarrollaremos una teoría de ciclos algebraicos. Esta puede realizarse para el caso más general de esquemas.

Sea X una variedad cuasi-proyectiva suave sobre $k = \bar{k}$ y $\text{char}(k) = 0$.

Definamos el grupo abeliano libre

$$Z(X) := \mathbb{Z}(\{\text{subvariedades irreducibles cerradas de } X\})$$

este está graduado por dimensión, podemos escribir

$$Z(X) = \bigoplus_{k \geq 0} Z_k(X)$$

Un ciclo $\sum n_i Z_i \in Z(X)$ es efectivo si $n_i \geq 0$ para todo i .

Si $Y \subset X$ subvariedad entonces $[Y] := \sum Y_i$ donde $Y = \cup Y_i$ es la descomposición de irreducibles de Y .

Definición 1.1 (Equivalencia Racional). Definamos $\text{Rat}(X) \subset Z(X)$ subgrupo generado por los $W \cap (\{t_0\} \times X) - W \cap (\{t_1\} \times X)$ con $W \subset \mathbb{P}^1 \times X$ subvariedad no contenida en ninguna fibra $\{t\} \times X$.

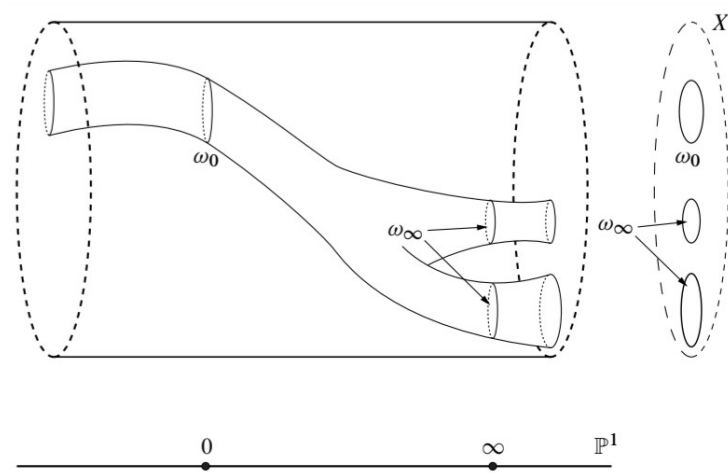


FIGURE 1 – Equivalencia racional entre ω_0 y ω_∞ en X

Intuitivamente, tenemos que dos ciclos son racionalmente equivalentes si hay una familia racionalmente parametrizada interpolándolos.

Definición 1.2 (Grupo de Chow). Definimos el grupo de Chow como $A(X) := Z(X)/\text{Rat}(X)$.

Proposición 1.3. $A(X) = \bigoplus A_k(X)$ graduado por dimensión.

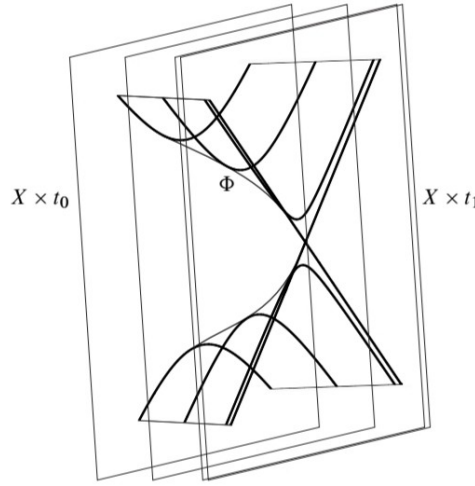


FIGURE 2 – Equivalencia Racional entre una hipérbola y la unión de dos líneas en $\mathbb{P}^2$

Si X es equidimensional (es decir, si cada componente irreducible tiene la misma dimensión) tenemos $\text{codim}_X Y = \dim X - \dim Y$ y podemos graduar el grupo de Chow por codimensión $A^c(X) := A_{\dim(X)-c}(X)$ (cf. notación cohomología).

Teorema 1.4 (Fulton, 1984). *Si X es suave cuasi-proyectiva entonces declarar $[A] \cdot [B] = [A \cap B]$ para $A, B \subset X$ subvariedades genéricamente transversales determina un único producto que hace $A(X) = \bigoplus_{c=0}^{\dim(X)} A^c(X)$ un anillo. Lo llamamos **anillo de Chow** y es conmutativo y graduado por la codimensión.*

El siguientes teorema es esencial para probar y entender el último resultado, además de hacer cálculos.

Lema 1.5 (Moving Lemma). *Sea X una variedad suave cuasi-proyectiva.*

1. *Para $\alpha, \beta \in A(X)$ hay ciclos $A, B \in Z(X)$ con $[A] = \alpha$, $[B] = \beta$ pero con A y B genéricamente transversales.*
2. *La clase de $[A \cap B]$ es independiente de la selección de estos ciclos en a).*

Proposición 1.6 (Kleinman, $\text{char}(k) = 0$). *Si G es grupo algebraico actuando transitivamente sobre X y $A, B \subset X$ son subvariedades entonces para $g \in G$ genérico se tiene que gA es genéricamente transversal a B . Si G es afín, entonces $[gA] = [A]$.*

Calculemos explícitamente el anillo de Chow del espacio afín.

Proposición 1.7. $A(X) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{A}^n]$

Démonstration. Sea $Y \subsetneq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín, queremos probar $Y \sim 0$. Sean $z = z_1, \dots, z_n$ coordenadas en $\mathbb{A}^n$ tal que $0 \notin Y$.

$$W^0 = \{(t, tz) \in (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n \mid t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, z \in Y\}$$

que es irreducible, por tanto $W := \overline{W^0}^{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n}$ es irreducible.

Notemos que $W_t^0 \simeq tY$ (la imagen de Y por el morfismo $z \mapsto t \cdot z$) y $W_1 = Y$.

Como $0 \notin Y$ hay un polinomio $g(z)$ que se anula en Y y tiene término constante no nulo. Si $G(z, t) = g(z/t)$ en $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n$ se extiende en una función regular en $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n$ con valor constante en $\infty \times \mathbb{A}^n$. Así, $W_\infty = \emptyset$ e $[Y]$ es de la forma $[W_1] - [W_\infty] \in \text{Rat}(X)$. $\square$

Proposición 1.8 (cf. Cohomología). *Se tiene :*

1. (cf. Mayer-Vietoris) Si X_1, X_2 son subvariedades de X entonces hay una sucesión exacta (con los morfismos como en Mayer-Vietoris en topología, inducidos por la inclusión) :

$$A(X_1 \cap X_2) \longrightarrow A(X_1) \oplus A(X_2) \longrightarrow A(X_1 \cup X_2) \longrightarrow 0$$

2. Excisión : Si $Y \subset X$ cerrado y $U := X \setminus Y$ entonces la inclusión y restricción de ciclos da la sucesión exacta

$$A(Y) \longrightarrow A(X) \longrightarrow A(U) \longrightarrow 0$$

Corolario 1.9. Si $U \subset \mathbb{A}^n$ abierto entonces $A(U) = \mathbb{Z} \cdot [U]$.

2 Functorialidad

Consideraremos morfismos $f : X \rightarrow Y$ propios.

Defina el pushforward de ciclos $f_* : Z(X) \rightarrow Z(Y)$ enviando $[A]$ a 0 si $\dim(A) > \dim(f(A))$ y $[A]$ a $d[f(A)]$ sino, donde $d = [k(C), k(f(A))]$.

Proposición 2.1. El morfismo f_* desciende a $f_* : A(X) \rightarrow A(Y)$.

Si X es propia, entonces las clases de puntos que son no-nulas, dan la noción de grado para 0-ciclos. Pues tenemos $f : X \rightarrow \text{Spec}(k) = \{pt\}$ propio, que induce $f_*\eta = \deg(\eta)[pt] \in \mathbb{Z}[pt]$.

Definición 2.2. Decimos que una subvariedad $A \subset Y$ es genéricamente transversa a f si la preimagen $f^{-1}(A)$ es genéricamente reducida y tiene la misma codimensión que A .

Teorema 2.3. Hay una única mapa de grupos $f^* : A^k(Y) \rightarrow A^k(X)$ tal que para todo $A \subset Y$ genéricamente transversa a f ,

$$f^*[A] = [f^{-1}(A)]$$

3 Estratificación

Recuerdo : $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0$.

Definición 3.1. Sea X una variedad cubierta por finitas subvariedades irreducibles localmente cerradas U_i . Si $X = \bigsqcup U_i$ y $\overline{U_i} = \bigcup_{j \in J} U_j$ para todo i . Decimos que X está estratificado afinmente si los U_i son isomorfos a espacios afines $\mathbb{A}^{k_i}$. Decimos que está cuasi-afinmente estratificado si los U_i son isomorfos a abierto de espacios afines.

Teorema 3.2. Si X tiene una estratificación cuasi-afín (resp. afín) entonces las clases de los $\overline{U_i}$ generan (respectivamente son base) de $A(X)$.

Teorema 3.3. $A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\xi]/\langle \xi^{n+1} \rangle$ donde una variedad de grado d y codimensión d es $d\xi^k$

Corolario 3.4 (Teorema de Bézout). Si C_1, C_2 son curvas en $\mathbb{P}^2$ que se intersectan transversalmente entonces se intersectan en $\deg(C_1) \cdot \deg(C_2)$ puntos puesto que

$$d_1\xi^1 d_2\xi^1 = [C_1] \cdot [C_2] = [C_1 \cap C_2] = d_1 d_2 \xi^2$$