Teoría de Intersección Valparaíso (Semana 1):

Referencia principal: "Intersection Theory in Algebraic Geometry" por François Greer / $\mathbb{C}$

Motivación: Sea X variedad proyectiva suave de $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$.

Dadas subvariedades (o subesquemas) $A, B \subseteq X$ nos gustaría definir/entender $A \cap B$ y que si $\#(A \cap B) < +\infty$ nos gustaría definir un "número de intersección" $A \cdot B \in \mathbb{Z}$ que tome en cuenta tangencias, multiplicidades, etc.

Obs: Si $A, B \subseteq X$ suaves $d(A)+d(B)=n$ y se intersectan transversalmente (ie, $T_pX = T_pA \oplus T_pB$ $\forall p \in A \cap B$) entonces $\operatorname{codim}(A \cap B) = \operatorname{codim}(A) + \operatorname{codim}(B)$.

Sobre $\mathbb{C}$, podemos considerar el anillo de cohomología singular $H^{\bullet}(X,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(X,\mathbb{Z})$

Si $\operatorname{codim}_X(A) = k$ y $\operatorname{codim}_X(B) = l$ entonces $[A] \in H^{2k}(X,\mathbb{Z})$ y $[B] \in H^{2l}(X,\mathbb{Z})$ luego, podemos definir $[A]\cdot[B] := [A] \cup [B] \in H^{2(k+l)}(X,\mathbb{Z})$, y dicho producto es conmutativo (pues sólo consideramos codim. real par!).

Ejemplo: En $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tenemos $\mathbb{P}^n = \{[z_0, \dots, z_n],\ z_0 \neq 0\} \sqcup \{[0, z_1, \dots, z_n]\}$
$\cong \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$

y así $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \{pt\}$.

$$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i \text{ par} \\ \{0\} & \text{si } i \text{ impar} \end{cases}$$

Más precisamente, $H^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[L_k]$ con $L_k \cong \mathbb{P}^{n-k}$ sub esp. lineal.

Si $H := L_1 \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano, entonces $[L_k] = [H]^k$ y así $H^{\bullet}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H]/\langle H^{n+1}\rangle$

Consecuencia: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ subvar. de $\dim_{\mathbb{C}}(X) = l$. La def. clásica de grado era el nº de puntos en $X \cap H_1 \cap \dots \cap H_l$ donde H_i hiperplanos generales en $\mathbb{P}^n$.

Usando Teo. de Intersección (eg. en $H^{\bullet}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$):

$[X] = d[H]^{n-l}$ cierto d y luego $[X \cap H_1 \cap \dots \cap H_l] = [X]\cdot[H_1]\cdots[H_l]$
$= d[H]^{n-l}[H]^l = d$.

ie, $d = \deg(X)$.

Ejemplo (Bézout): Sean $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ curvas de grado d_1, d_2, ie, $[C_1] = d_1[H]$ y $[C_2] = d_2[H]$. Entonces, $[C_1]\cdot[C_2] = d_1 d_2 [H]^2 = d_1 d_2$ "$= [C_1 \cap C_2]$"

⚠ El cálculo anterior es válido incluso si C_1 y C_2 no se intersectan transversalmente (eg. $C_1 = C_2$!). Para dar una interpretación correcta hay que considerar:

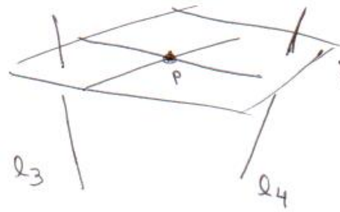
① Multiplicidades

② "Exceso" (más adelante...).

A pesar de esto, el cálculo "inocente" es muy útil de todas formas. Por ejemplo:

1. Sean $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \subseteq \mathbb{P}^3$ 4 rectas generales. ¿cuántas rectas $\ell \subseteq \mathbb{P}^3$ intersectan $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$?

<u>Idea</u>: Si $\ell_1 \cap \ell_2 = \{p\}$ ($\Rightarrow$ <u>no</u> son generales)



$H = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$

Como ℓ intersecta ℓ_1 y ℓ_2:

① $\ell \subseteq H$ y luego $\ell = \overline{p_3 p_4}$ con $p_3 = H \cap \ell_3$, $p_4 = H \cap \ell_4$

o bien: ② $p \in \ell \not\subseteq H$: $\ell_3 \cap \ell_4 = \{q\}$ y luego $\ell = \overline{pq}$.

$\Rightarrow$ Hay 2 posibles rectas!

<u>Heurística</u>: Este "caso especial" se deforma al "caso general" sin cambiar la respuesta.

Más formalmente:

Sea $G := \mathbb{G}(1,3) = \underset{\text{dim } 4}{Gr(2,4)}$ la grassmanniana de $\ell \cong \mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^3$, i.e., $L \cong \mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^4$.

<u>Plücker</u>: $G \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \cong \mathbb{P}^5$, $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1, v_2) \mapsto [v_1 \wedge v_2]$

La imagen es la <u>cuádrica</u> de Plücker $G \cong Q = \{x_0x_1 - x_2x_3 + x_4x_5 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$.

Para $\ell_0 \subseteq \mathbb{P}^3$, definimos la <u>subvariedad de Schubert</u>

$$\Sigma(\ell_0) := \{\text{Rectas } \ell \subseteq \mathbb{P}^3 \text{ tal que } \ell \cap \ell_0 \neq \emptyset\} \subseteq G.$$

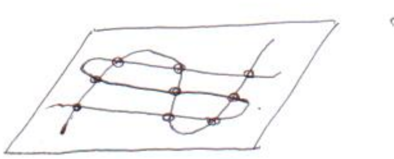
Usando coord. de Plücker se puede ver que $\Sigma(\ell_0) = G \cap H_{\ell_0}$, con $H_{\ell_0} \cong \mathbb{P}^4$ es el hiperplano de $\mathbb{P}^5$ tangente a G en el punto $[\ell]$.

Finalmente, tenemos que el nº buscado es $[\Sigma(\ell_1)] \cdot [\Sigma(\ell_2)] \cdot [\Sigma(\ell_3)] \cdot [\Sigma(\ell_4)]$

$$= [Q] \cdot [H]^4 \underset{\deg Q = 2}{=} 2 \cdot [H] \cdot [H]^4 = 2 \checkmark$$

<u>Obs</u>: Más generalmente se puede calcular $H^\bullet(\mathbb{G}(k,n), \mathbb{Z})$ y las fórmulas que aparecen en este contexto se conocen como "<u>cálculo de Schubert</u>".

2. Sean $C_1 = \{f = 0\}$, $C_2 = \{g = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ dos cúbicas suaves generales.



<u>Bézout</u>: $C_1 \cap C_2 = \{p_1, \ldots, p_9\}$.

Consideramos el "<u>pincel</u>" de cúbicas generado por C_1 y C_2

$\{\lambda f + \mu g = 0\}_{[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1}$

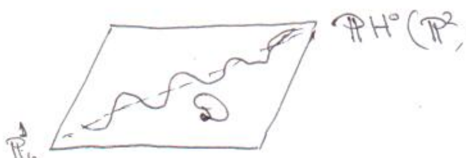
i.e., las fibras de $\mathbb{P}^2 \overset{\pi}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^1$, $[x,y,z] \mapsto [f(x,y,z), -g(x,y,z)]$

~~Exc(π) = {p₁, …, p₉}~~ y <u>no</u> está bien definida en $\{p_1, \ldots, p_9\}$

$$\begin{tikzcd} X := Bl_{p_1, \ldots, p_9}(\mathbb{P}^2) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathbb{P}^1 \\ \mathbb{P}^2 \arrow[ur, dashed, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

resuelve las indeterminaciones de π, y obtenemos una <u>fibración elíptica</u>.

¿Cuántas fibras singulares tiene típicamente φ?



$\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \cong \mathbb{P}^9$.

<u>Hecho</u>: $\exists\, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^9$ divisor tal que $[C] \in \mathcal{D} \iff C \subseteq \mathbb{P}^2$ es singular.

Además, $\deg(\mathcal{D}) = 12$.

φ tiene asociado $\mathbb{P}^1_\varphi \subseteq \mathbb{P}^9$ y así la respuesta es $[\mathbb{P}^1_\varphi] \cdot [\mathcal{D}] = 12$

Objetivo: Tener una versión algebraica de $H^\bullet(X,\mathbb{Z}) \rightsquigarrow$ Anillo de Chow $A^\bullet(X) = CH^\bullet(X)$

Lo primero es definir la intersección entre divisores (de Cartier) y subvariedades.

Recuerdo: Sea X var proy suave $/\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$ y sea $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ en $\mathrm{Pic}(X)$. Si $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$, $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot [p_i]$, $p_i \in X$ puntos, y $\deg(D) = \sum_{i=1}^{r} n_i$ no depende de la clase de equiv lineal $D = D' + \mathrm{div}(f)$ y $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

Más generalmente (ver eg. "Higher Dimensional Alg Geometry" por Olivier Debarre):

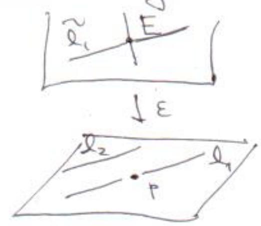
① Si $\Gamma \subseteq X$ curva irreducible, entonces $\nu : \Gamma^\nu \to \Gamma$ (normalización) produce Γ^ν suave proy y definimos

$$D \cdot \Gamma := \deg\left(\nu^*\left(\mathcal{O}_X(D)|_\Gamma\right)\right) \in \mathbb{Z}$$

En part, si $D \sim D'$ entonces $D \cdot \Gamma = D' \cdot \Gamma$.

Eg (a) Si $X = \mathbb{P}^2$, $D = C_1 \sim d_1 l$, $\Gamma = C_2 \sim d_2 l$ curvas de grados d_1, d_2

$\Rightarrow D \cdot \Gamma = d_1 d_2 (l \cdot l) = d_1 d_2$ (Bézout).



(b) Si $X = Bl_p(\mathbb{P}^2)$ y $D = \Gamma = E$:

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon^* l_1 = \tilde{l}_1 + E & /\cdot E \\ \parallel & \\ \varepsilon^* l_2 = \tilde{l}_2 & /\cdot E \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{E \cdot \tilde{l}_2}_{=0} = \underbrace{E \cdot \tilde{l}_1}_{=1} + E^2$$

y así $\boxed{E^2 = -1}$

② Si $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ y $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ entonces $\exists\, P \in \mathbb{Q}[m]$ con $\deg(P) \leq \dim \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ tal que $P(m) = \chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$ $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Si escribimos $\chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = c \cdot \frac{m^d}{d!} + O(m^{d-1})$ con $d = \deg(P)$, entonces $c =: \mathcal{L}^d \cdot \mathcal{F} = D^d \cdot \mathcal{F}$ si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$.

Eg (a) Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, $d = n$, entonces $\mathcal{L}^n \cdot \mathcal{O}_X := \mathcal{L}^n = D^n$ auto intersección.

(b) $Y \subseteq X$ subvar de $\dim_{\mathbb{C}}(X) = d$ y $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, entonces obtenemos

$$\mathcal{L}^d \cdot Y = D^d \cdot Y = (\mathcal{L}|_Y)^d =: (D|_Y)^d$$

(c) Si $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ incrustada vía $\mathcal{O}_X(1) := i^* \mathcal{O}_X(1)$ muy amplio. Entonces

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(m)) = \deg(X) \frac{m^d}{d!} + O(m^{d-1}) \text{ con } d = \dim(X), \text{ ie, } \deg(X) = \mathcal{O}_X(1)^d.$$

③ Si $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r \in \mathrm{Pic}(X)$ con $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{O}_X(D_i)$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ ~~con dim~~ entonces $P(m_1, \ldots, m_r) = \chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r^{\otimes m_r})$ para cierto $P \in \mathbb{Q}[m_1, \ldots, m_r]$ de grado total $d \leq \dim \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$. Si $r = n = \dim(X)$, se define

$$D_1 \cdots D_n = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n = \text{coef de } m_1 \cdots m_r \text{ de } \chi(X, \mathcal{L}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n^{\otimes m_n}).$$

Entonces: (a) Si $Y \subseteq X$ subvar de ~~codim~~ dim r, $\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_r \cdot Y := (\mathcal{L}_1|_Y) \cdots (\mathcal{L}_r|_Y)$.

(b) La aplicación $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n) \mapsto \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n$ es multilineal simétrica con valores en $\mathbb{Z}$.

(c) Si $Y \in |D_n|$ entonces $\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_{n-1} \cdot Y = (\mathcal{L}_1|_Y) \cdots (\mathcal{L}_{n-1}|_Y)$

(d) Fórmula de Proyección: $\pi : Y \twoheadrightarrow X$ sobrey, X e Y proy, entonces si $n = \dim(X) = \dim Y$

$$\pi^* \mathcal{L}_1 \cdots \pi^* \mathcal{L}_n = \deg(\pi)(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n).$$