Seminario THC (Semana 7): "Faisceaux Algébriques Cohérents (FAC) de Serre"

Sea X variedad alg$/\mathbb{C}$ (salvo quizás al final) y $\mathcal{O}_X$ su haz de funciones regulares.

Recuerdo: Un $\mathcal{O}_X$-módulo es un haz $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$-ev. tq $\forall\, \mathcal{U}\subseteq X$ abierto $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ es un $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulo. Obtenemos una categoría (abeliana) $\mathcal{O}_X$-Mod.

⚠ Si $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ suc. exacta en $\mathcal{O}_X$-Mod entonces la sucesión de secciones globales $0\to\Gamma(X,\mathcal{F})\to\Gamma(X,\mathcal{G})\to\Gamma(X,\mathcal{H})$ es exacta, pero $\Gamma(X,\mathcal{G})\to\Gamma(X,\mathcal{H})$ puede no ser sobreyectivo !

Objetivo de FAC: Relacionar la cohomología de Čech con cohomología ~~vía~~ funtores derivados (Grothendieck) para el caso de "haces coherentes".

Aquí: (1°) Čech (calculatorio!): Si $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubr. abierto de X y para $p\geq 0$ definimos $\check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{i_0<\dots<i_p}\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p})$ p-cocadenas de Čech.

Eg. $s=\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ en $\check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y $s=\{s_{ij}\}$ con $s_{ij}\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)$ en $\check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ etc. Se define $d^p:\check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $s\mapsto d^ps$ con $(d^ps)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k s_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1}}|_{\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_{p+1}}}\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_{p+1}})$.

Eg. Si $s=\{s_i\}\in\check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $(d^0s)_{i_0i_1} = s_{i_1}|_{\mathcal{U}_{i_0}\cap\mathcal{U}_{i_1}} - s_{i_0}|_{\mathcal{U}_{i_0}\cap\mathcal{U}_{i_1}}$.

Se verifica que $d^{p+1}\circ d^p\equiv 0\ \forall p\in\mathbb{N}$ y luego $\check{H}^p_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{F}) := \ker(d^p)/\mathrm{Im}(d^{p-1})$

(2°) Grothendieck (bueno para el abstract non-sense!): La categoría $\mathcal{O}_X$-Mod tiene "suficientes inyectivos", i.e., $\mathcal{F}$ ~~en~~ $\mathcal{O}_X$-Mod tiene asociada una "resolución" dada por un complejo exacto $0\to\mathcal{F}\overset{\varepsilon}{\hookrightarrow}\mathcal{I}^0_{\mathcal{F}}\xrightarrow{d^0}\mathcal{I}^1_{\mathcal{F}}\xrightarrow{d^1}\mathcal{I}^2_{\mathcal{F}}\xrightarrow{d^2}\dots$ con cada $\mathcal{I}^m_{\mathcal{F}}$ un objeto inyectivo (cf. "Hahn-Banach": Si $\mathcal{G}\hookrightarrow\mathcal{H}$, todo $\mathcal{G}\to\mathcal{I}^m_{\mathcal{F}}$ se extiende a $\mathcal{H}\to\mathcal{I}^m_{\mathcal{F}}$). Si aplicamos "$\Gamma$" (secciones globales) obtenemos

$0\to\Gamma(X,\mathcal{F})\xrightarrow{\Gamma(\varepsilon)}\Gamma(X,\mathcal{I}^0_{\mathcal{F}})\xrightarrow{\Gamma(d^0)}\Gamma(X,\mathcal{I}^1_{\mathcal{F}})\xrightarrow{\Gamma(d^1)}\dots$ complejos no necesariamente exacto (!) y luego definimos $H^i(X,\mathcal{F}) := H^i$(complejo anterior) $\overset{def}{=}\ker(\Gamma(d^i))/\mathrm{Im}(\Gamma(d^{i-1}))$

A pesar de ser difícil de calcular con esto, se cumple:

✓ $H^0(X,\mathcal{F})=\Gamma(X,\mathcal{F})$

✓ $\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ en $\mathcal{O}_X$-Mod induce $H^i(\varphi): H^i(X,\mathcal{F})\to H^i(X,\mathcal{G})$

✓ $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ exacta induce suc. exacta larga en cohomología.

Def: Decimos que $\mathcal{A}$ en $\mathcal{O}_X$-Mod es Γ-acíclico si $H^i(X,\mathcal{A})=0\ \forall i\geq 1$.

Eg: Si $\mathcal{A}$ es inyectivo entonces $\underbrace{0\to\mathcal{A}\xrightarrow[Id]{\varepsilon}\mathcal{A}\xrightarrow{0}0\to 0\to\dots}_{\text{resol. iny}}\implies H^i(X,\mathcal{A})=0\ \forall i\geq 1$.

Teorema de de Rham formal: Sea $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-Mod (o $\mathcal{C}$ cat. ab con suf. inyectivos) y $\mathcal{F} \to \mathcal{K}^\bullet$ resolución con $\mathcal{K}^i$ Γ-acíclico $\forall i$. Entonces, $H^i(X,\mathcal{F}) \cong H^i(\Gamma(\mathcal{K}^\bullet))$.

Ejemplos importante:

1. Sup. X var dif. compacta y $\mathcal{O}_X := \mathcal{C}^\infty_X$, entonces todo $\mathcal{O}_X$-Mod $\mathcal{F}$ cumple $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ $\forall i \geq 1$. En efecto, basta probar que el functor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ es exacto: Sea $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sobreyectivo y $\sigma \in \Gamma(X,\mathcal{G})$. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ cubr. abierto de X y sean $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tq $f(s_i) = \sigma|_{U_i}$. Sea $\sum_{i\in I} \varphi_i = 1$ partición de 1 resp. a $\{U_i\}_{i\in I}$. Si elegimos $t_i \in \mathcal{F}(X)$ verificando que $t_i|_{U_i} = \varphi_i s_i$ y $t_i|_{X-\mathrm{Supp}(\varphi_i)} \equiv 0$ entonces $s := \sum_{i\in I} t_i \in \mathcal{F}(X)$ cumple $\Gamma(f)(s) = \sigma$.
Así $\underline{\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_X$ dado por $0 \to \underline{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \to \dots \xrightarrow{d} \Omega^{\dim(X)}_X \to 0$ es un complejo (de de Rham) Γ-acíclico $\underset{dR\ \text{formal}}{\Longrightarrow}$ $H^i(X,\underline{\mathbb{R}}) \cong \underbrace{H^i(\Gamma(\Omega^\bullet_X))}_{\stackrel{\text{def}}{=} H^i_{dR}(X)}$.

2. Sea X var analítica compleja compacta y $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}^{an}_X$ funciones holomorfas. Entonces (Dolbeault-Grothendieck) $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^{0,\bullet}_X$ es una resol. Γ-acíclica $\Longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_X) \cong H^i(\Gamma(\mathcal{A}^{0,\bullet}_X)) \stackrel{\text{def}}{=} H^{0,i}_{\bar\partial}(X)$ cohom. de Dolbeault y más generalmente $H^i(X,\Omega^j_X) \cong H^{j,i}_{\bar\partial}(X)$.

Volvamos a variedades algebraicas:

Hecho: Todo $\mathcal{O}_X$-mod inyectivo $\mathcal{I}$ es flasque, ie, $\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(U)$ sobrey. para todo abierto $U \subseteq X$. Además, todo haz flasque es Γ-acíclico.

$\Downarrow$

Teorema (Leray): Sea X esp. top. y $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en X. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ cubr. abierto de X tq $H^p(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}, \mathcal{F}) = 0$ $\forall k \geq 1$, $\forall i_1, \dots, i_k \in I$ y $\forall p \geq 1$. Entonces, $\check{H}^i_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$ $\forall i \geq 0$.

J.-P. Serre: Determina una clase de $\mathcal{O}_X$-módulos que verifican lo anterior!

Def: Sea X var. alg. y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es un haz coherente si $\forall x \in X$, $\exists U \subseteq X$ vecindad abierta de $x \in X$ y $n, m \in \mathbb{N}$ tales que hay una suc. exacta $\mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0$, y obtenemos la categoría $\underline{\mathrm{Coh}}(X)$.

Si $E \to X$ fibr. vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathcal{E}$ su haz de secciones $\Rightarrow \mathcal{E}|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus r}$ localmente. Así, los haces coherentes son cokernel/kernel de morfismos de fibr. vectoriales $\rightsquigarrow$ $\underline{\mathrm{Coh}}(X)$ categoría abeliana!

Teorema (Serre): Sea X var. alg afín y $\mathcal{F}$ en $\underline{\mathrm{Coh}}(X)$. Entonces, $\forall f \in \mathcal{O}(X)$ el morfismo $\varphi_f : \Gamma(X,\mathcal{F})_f \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}_f,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\mathcal{U}_f)$, $\frac{s}{f^p} \mapsto \frac{1}{f^p}\cdot s|_{\mathcal{U}_f}$ es un isomorfismo.
Así, $\mathcal{F}$ está determinado por $\Gamma(X,\mathcal{F})$ (pues $\{\mathcal{U}_f\}_{f\in\mathcal{O}(X)}$ base top. de X !).

Recíprocamente: si $A = \mathcal{O}(X)$ y M es un A-módulo entonces se define $\widetilde{M}$ en $\mathcal{O}_X$-Mod como $\widetilde{M}(\mathcal{U}_f) := M_f$. Luego, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ y $M \mapsto \widetilde{M}$ son inversas una de la otra y en particular $\widetilde{M}$ coherente $\iff$ M es A-mod fin. gen.

Corolario (Serre): Sea X afín y $\mathcal{F}$ en $\underline{\mathrm{Coh}}(X)$, entonces $H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall i \geq 1$.

Dem: Sea $A = \mathcal{O}(X)$ y $M := \Gamma(X,\mathcal{F})$. Sea $M \longrightarrow I^\bullet$ resol. iny en A-Mod y $\mathcal{I}^p := \widetilde{I^p}$. Se verifica que $\mathcal{I}^p$ es flasque y luego Γ-acíclico ($I^\bullet$ iny)
$\Rightarrow \widetilde{M} \cong \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ resol. Γ-acíclica $\underset{\text{dR formal}}{\Longrightarrow} H^i(X,\mathcal{F}) \underset{\text{dR}}{\cong} H^i(\Gamma(X,\mathcal{I}^\bullet)) \cong H^i(I^\bullet) = 0 \quad \forall i \geq 1$ ∎

Dado que si X separada $\Rightarrow$ "$\mathcal{U}, V \subseteq X$ afines ~~implica~~ implica $\mathcal{U} \cap V$ afín":

Teo: Sea X var. alg. (separada) y $\mathcal{F}$ haz coherente. Entonces, para todo $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto afín se cumple que.
$$\check{H}^i_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$$

Dem: Combinar Teo. de Serre (su Corolario) y el Teo. de Leray ✓ ∎

Ejemplo: Sea $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ var. proyectiva de $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$ y $\mathcal{F}$ coherente en X.
$\Rightarrow \exists \Lambda \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ subesp. lineal de $\mathbb{P}^N$ tq $X \cap \Lambda = \phi$ (Bertini).
Si $\Lambda = \{x_0 = \dots = x_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^N \Rightarrow X \subseteq \mathcal{U}_0 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$ con $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$
$\Rightarrow V_i := X \cap \mathcal{U}_i$ abierto afín. Luego X se cubre por los $n+1$ abiertos afines $\{V_0,\dots,V_n\}$ y así $\check{H}^p_{\mathcal{V}}(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall p > n \underset{\text{Leray/Serre}}{\Longrightarrow} H^p(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall p > \dim(X)$.