

SEMINARIO SOBRE TEORÍA DE HODGE CLÁSICA

PEDRO MONTERO & ROBERTO VILLAFLORES, UTFSM

Estas notas son material complementario al Seminario de Teoría de Hodge Clásica (UTFSM, 2024-1).

1. Variedades de Kähler

Recuerdo: Si $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto f(z)$ es una función \mathcal{C}^∞ en $z = x + iy$, entonces se definen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

y tenemos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es **holomorfa** si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ en Ω (Cauchy-Riemann).

Sea X una variedad compleja de $\dim_{\mathbf{C}}(X) = n$, y sean (z_1, \dots, z_n) coordenadas locales holomorfas. Si escribimos $z_j = x_j + iy_j$, entonces las k -formas diferenciales (reales) en X están dadas por

$$u(x, y) = \sum_{\text{loc}} \sum_{|I|+|J|=k} u_{I,J}(x, y) dx_I \wedge dy_J,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $u_{I,J}$ es una función \mathcal{C}^∞ , y donde para un conjunto de índice $I = (i_1, \dots, i_p)$ escribimos $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Así, como $x_j = \frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j)$ e $y_j = \frac{1}{2i}(z_j - \bar{z}_j)$ tenemos que

$$u(z) = \sum_{\text{loc}} \sum_{|I|+|J|=k} \tilde{u}_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J \text{ donde } dz_j = dx + idy_j \text{ y } d\bar{z}_j = dx - idy_j.$$

Decimos que una **forma de tipo** (p, q) es una sección global u de $\wedge^{p,q} T_X^* := \wedge^p T_X^* \otimes \wedge^q \bar{T}_X^*$, i.e.,

$$u(z) = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \tilde{u}_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J, \text{ donde } k := p + q \text{ es el } \mathbf{grado\ total} \text{ de } u.$$

Para dicha u , se define su **diferencial exterior** como $du := \sum_{I,J} d\tilde{u}_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$, donde por definición

$$d\tilde{u}_{I,J}(z) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{u}_{I,J}}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial \tilde{u}_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \stackrel{\text{def}}{=} \partial \tilde{u}_{I,J} + \bar{\partial} \tilde{u}_{I,J}.$$

Así, $du = \partial u + \bar{\partial} u$ y luego $d = \partial + \bar{\partial}$ como operadores diferenciales.

Observación: El hecho que $d^2 = 0$ implica que $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$. Además, si u es una k -forma de tipo (p, q) entonces ∂u (resp. $\bar{\partial} u$) es una forma de tipo $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$).

Definición: Sea X una variedad compleja de $\dim_{\mathbf{C}}(X) = n$. Decimos que X es una **variedad de Kähler** si existe una $(1, 1)$ -forma

$$\omega = i \sum_{\text{loc}} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \omega_{jk}(z) dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

tal que ω es real (i.e., $\omega = \bar{\omega}$, i.e., $\Omega(z) := (\omega_{jk}(z))_{j,k}$ es una matriz simétrica hermitiana¹ para todo $z \in X$), la matriz $\Omega(z)$ es definida positiva, y además $d\omega = 0$.

Ejemplo: Veamos que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ es de Kähler. Para ello, consideramos coordenadas homogéneas $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_n]$ y definimos (en cartas locales) $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{j=0}^n |z_j|^2}$. De define la **métrica de Fubini-Study** por

$$\omega_{\text{FS}} := \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|\mathbf{z}\|^2 = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\|\mathbf{z}\|^2 (\sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j) - (\sum_j \bar{z}_j dz_j) \wedge (\sum_k z_k d\bar{z}_k)}{\|\mathbf{z}\|^4}.$$

Así, tenemos que ω_{FS} es una $(1, 1)$ -forma real. Además, ω_{FS} es invariante por la acción natural del grupo unitario $U(n+1)$ en $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, y por ende basta verificar en un punto que ω_{FS} es definida positiva: si $p = [1, 0, \dots, 0]$ entonces $\omega_{\text{FS}}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ verifica que $\Omega(z) = \frac{1}{2\pi} \text{Id}_n$ es definida positiva. Además, dado que $\omega_{\text{FS}} = \partial \bar{\partial} \varphi$ para una función suave φ , tenemos que $d(\partial \bar{\partial} \varphi) = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial \bar{\partial} \varphi) = \partial^2 \varphi + \bar{\partial} \partial \bar{\partial} \varphi = -\bar{\partial}^2 (\partial \varphi) = 0$, pues $\partial \bar{\partial} = -\bar{\partial} \partial$.

¹Notar que $\bar{\omega} = -i \sum_{1 \leq j, k \leq n} \bar{\omega}_{jk}(z) d\bar{z}_j \wedge dz_k = i \sum_{1 \leq j, k \leq n} \bar{\omega}_{jk}(z) dz_k \wedge d\bar{z}_j = i \sum_{1 \leq j, k \leq n} \bar{\omega}_{kj}(z) dz_j \wedge d\bar{z}_k$.

Observación: Si (X, ω) es una variedad de Kähler y $Y \hookrightarrow X$ es una subvariedad compleja, entonces $(Y, \omega|_Y)$ es una variedad de Kähler. En particular, toda variedad proyectiva es una variedad de Kähler. Por otra parte todo toro complejo $X \cong V/\Lambda$, con $V \cong \mathbf{C}^g$ y $\mathbf{Z}^{2g} \cong \Lambda \subseteq V$ es un reticulado, es una variedad de Kähler respecto a la métrica $\omega = i \sum_{j=1}^g dz_j \wedge d\bar{z}_j$, pero **no todo** toro de dimensión $g \geq 2$ es una variedad proyectiva.

Para enunciar el Teorema de descomposición de Hodge, necesitamos recordar que una forma diferencial u de tipo (p, q) es $\bar{\partial}$ -**cerrada** (resp. $\bar{\partial}$ -**exacta**) si $\bar{\partial}u = 0$ (resp. si $u = \bar{\partial}v$ para cierta forma v de tipo $(p, q-1)$).

Definición: Sea X una variedad compleja. Para todo $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ con $p+q \leq n = \dim_{\mathbf{C}}(X)$, el **grupo de cohomología de Dolbeault** es el \mathbf{R} -espacio vectorial cociente

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) := \{\text{formas } \bar{\partial}\text{-cerradas de tipo } (p, q) \text{ en } X\} / \{\text{formas } \bar{\partial}\text{-exactas de tipo } (p, q) \text{ en } X\}.$$

Observación: Si X es una variedad de Kähler compacta, entonces por una parte el Teorema de de Rham permite probar que el grupo de cohomología singular $H^k(X, \mathbf{C})$ es isomorfo a la de de Rham

$$H^k(X, \mathbf{C}) \cong H_{\text{dR}}^k(X, \mathbf{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \{k\text{-formas d-cerradas en } X\} / \{k\text{-formas d-exactas en } X\}.$$

Por otra parte, el **Teorema de descomposición de Hodge** nos da

$$H_{\text{dR}}^k(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X), \text{ donde } \overline{H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)} = H_{\bar{\partial}}^{q,p}(X).$$

Además, el **Teorema del isomorfismo de Dolbeault** asegura que $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \cong H^q(X, \Omega_X^p)$, donde este último grupo denota la cohomología con coeficientes en el **haz coherente** Ω_X^p de p -formas holomorfas.

Ejemplo principal: Recordemos que la cohomología singular de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ está dada por

$$H^i(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } 0 \leq i \leq 2n \text{ con } i \text{ par,} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Dado que $\omega_{\text{FS}}^k := \omega_{\text{FS}} \wedge \cdots \wedge \omega_{\text{FS}}$ es una clase no-nula² en $H_{\bar{\partial}}^{k,k}(X)$, el Teorema de descomposición de Hodge implica que

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) \cong \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

En particular, el Teorema del isomorfismo de Dolbeault nos dice que³ $H^q(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}) = 0$ para todo $q \geq 1$.

1.1. Un poco de Álgebra Lineal, Geometría Riemanniana, y Análisis Funcional

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclideo de $\dim_{\mathbf{R}}(V) = m$. El producto escalar en V induce un producto escalar en el álgebra exterior $\bigwedge^{\bullet} V \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R} \oplus V \oplus \bigwedge^2 V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^m V$ al declarar que $\bigwedge^p V$ y $\bigwedge^q V$ son ortogonales para todo $p \neq q$ y que para $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \in \bigwedge^p V$ se tiene $\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle := \det(\langle v_j, w_k \rangle)_{j,k}$.

Supongamos en lo que sigue que V está **orientado**, i.e., fijamos (e_1, \dots, e_m) base ortonormal de V tal que $\det(e_1, \dots, e_m) > 0$ y consideramos $\text{vol} := e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \in \bigwedge^m V \cong \mathbf{R}$.

Definición: Se define el operador **de Hodge** como $\star : \bigwedge^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-p} V$ definido por la propiedad

$$v \wedge (\star w) = \langle v, w \rangle (e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) \stackrel{\text{def}}{=} \langle v, w \rangle \text{vol} \text{ para todos } v, w \in \bigwedge^p V.$$

Ejemplos: Sea (e_1, \dots, e_m) base ortonormal de V orientada positivamente, entonces

1. $\star 1 = \text{vol}$, $\star \text{vol} = 1$, $\star e_1 = e_2 \wedge \cdots \wedge e_m$, $\star e_2 = -e_1 \wedge e_3 \wedge \cdots \wedge e_m$, etc.

2. $\star^2 \stackrel{\text{def}}{=} \star \circ \star : \bigwedge^p V \rightarrow \bigwedge^p V$ verifica $\star^2 = (-1)^{p(m-p)} \text{Id}_{\bigwedge^p V}$ puesto que

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_{m-p}) = (-1)^{p(m-p)} (w_1 \wedge \cdots \wedge w_{m-p}) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p).$$

3. Para todos $v, w \in \bigwedge^p V$ se tiene $\langle v, w \rangle = \star(v \wedge \star w) = \star(w \wedge \star v)$.

4. Dado que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no-degenerado, induce un isomorfismo $V \xrightarrow{\sim} V^*$, $v \mapsto \ell_v := \langle \cdot, v \rangle$. Así, podemos definir un producto escalar en V^* mediante $\langle \ell_v, \ell_w \rangle_{V^*} := \langle v, w \rangle$, y con ello definir la \star de Hodge en $\bigwedge^p V^*$.

²Eso es consecuencia del Teorema de Stokes y del hecho que $\int_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \omega_{\text{FS}}^n = 1 \neq 0$.

³Este cálculo es crucial en la demostración del teorema principal de famoso artículo *GAGA* de Jean-Pierre Serre.

Lo anterior se puede *globalizar* al contexto de variedades riemannianas:

Sea (M^m, g) una variedad riemanniana orientada con $\text{dvol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ forma de volumen, y sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E) \rightarrow M$ un fibrado vectorial euclideo⁴. Entonces, dotamos al espacio vectorial

$$\Gamma_c(M, E) := \{s : M \rightarrow E \text{ sección } \mathcal{C}^\infty \text{ con soporte compacto}\}$$

del producto L^2 dado por $\langle \langle s, t \rangle \rangle := \int_M \langle s, t \rangle_E \text{dvol}_g$, que es bilineal, simétrico y definido positivo.

¡Atención! Incluso en el caso compacto, donde $\Gamma_c(M, E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty(M, E)$, **no** es cierto que $\Gamma(M, E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty(M, E)$ es un espacio de Hilbert. Típicamente, debe considerarse su completación en un espacio de Sobolev $W^{k,2}(M, E)$.

Definición: Sean $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ y $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ dos fibrados vectoriales euclideos en una variedad riemanniana (M^m, g) , y sea $P : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, F)$ un operador lineal. Un operador **adjunto formal** a P es un operador lineal $P^* : \Gamma(M, F) \rightarrow \Gamma(M, E)$ tal que $\langle \langle Ps, t \rangle \rangle_F = \langle \langle s, P^*t \rangle \rangle_E$ para todas $s \in \Gamma_c(M, E)$, $t \in \Gamma_c(M, F)$.

Ejemplo: Sea $\mathcal{A}^p(M)$ el espacio de p -formas diferenciales en M , y sea

$$d : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M), f \mapsto df = \sum_{\text{loc}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

entonces si $\omega = \sum_{\text{loc}} \omega_i dx_i \in \mathcal{A}_c^1(M)$ y si $\text{dvol}_g = \gamma(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ con $\gamma(x) = \sqrt{\det(g_{ij})}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \langle df, \omega \rangle \rangle_{\mathcal{A}^1} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_M \langle df, \omega \rangle \text{dvol}_g = \int_{\mathbf{R}^m} \sum_{i,j} g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \omega_j \cdot \gamma(x) dx_1 \cdots dx_m = - \int_{\mathbf{R}^m} \sum_{i,j} f \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \omega_j \gamma) dx_1 \cdots dx_m \\ &= - \int_{\mathbf{R}^m} \sum_{i,j} f \gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \omega_j \gamma) \text{dvol}_g \stackrel{\text{def}}{=} \langle \langle f, d^* \omega \rangle \rangle_{\mathcal{C}^\infty} \end{aligned}$$

de donde obtenemos $d^* \omega = - \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det(g_{ij})} \cdot g^{ij} \omega_j) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Observación: De manera completamente análoga, se prueba que el adjunto formal de $d : \mathcal{A}^p(M) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(M)$ está dado por $d^* = (-1)^{pm+1} \star \circ d \circ \star = (-1)^{p+1} \star^{-1} \circ d \circ \star$. En efecto, si $\omega \in \mathcal{A}_c^p(M)$ y $\eta \in \mathcal{A}_c^{p+1}(M)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \langle d\omega, \eta \rangle \rangle &= \int_M \langle d\omega, \eta \rangle \text{dvol}_g \stackrel{\text{def}}{=} \int_M d\omega \wedge \star \eta = \int_M (d(\omega \wedge \star \eta) - (-1)^p \omega \wedge d(\star \eta)) = (-1)^{p+1} \int_M \omega \wedge d(\star \eta) \\ &= (-1)^{p+1+p(m-p)} \int_M \omega \wedge \star((\star \circ d \circ \star)(\eta)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_M \langle \omega, (-1)^{pm+1} (\star \circ d \circ \star)(\eta) \rangle \text{dvol}_g \stackrel{\text{def}}{=} \langle \langle \omega, d^* \eta \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Definición: Sea (M^m, g) variedad riemanniana orientada. Se define el **operador de Hodge–Laplace–Beltrami** como $\Delta_g : \mathcal{A}^p(M) \rightarrow \mathcal{A}^p(M)$ mediante $\Delta := dd^* + d^*d$, y denotamos por

$$\mathcal{H}^p(M) := \{\omega \in \mathcal{A}^p(M), \Delta_g \omega = 0\} \text{ al } \mathbf{R}\text{-espacio vectorial de } p\text{-formas armónicas en } M.$$

Ejemplo: Si $p = 0$ entonces $\Delta_g = d^*d$ y luego para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene que

$$\Delta_g f = d^*(df) = - \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det(g_{ij})} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \text{ es el operador de Laplace–Beltrami.}$$

Propiedades del operador Δ_g :

1. Δ_g es formalmente auto-adjunto: $\langle \langle \Delta_g \omega, \eta \rangle \rangle = \langle \langle dd^* \omega + d^* d \omega, \eta \rangle \rangle = \langle \langle d^* \omega, d^* \eta \rangle \rangle + \langle \langle d\omega, d\eta \rangle \rangle = \langle \langle \omega, \Delta_g \eta \rangle \rangle$.
2. Dado que $d^* = (-1)^{pm+1} \star \circ d \circ \star$, tenemos que $\star \circ \Delta_g = \Delta_g \circ \star$. Así, $\omega \in \mathcal{H}^p(M) \Leftrightarrow \star \omega \in \mathcal{H}^{m-p}(M)$.
3. Si $\omega \in \mathcal{A}^p(M)$, entonces $\omega \in \mathcal{H}^p(M)$ si y sólo si $d\omega = d^* \omega = 0$. Por definición de Δ_g basta probar que toda p -forma armónica es d -cerrada y d^* -cerrada: Si $\Delta_g \omega = 0$ entonces $\langle \langle \Delta_g \omega, \omega \rangle \rangle = \|d^* \omega\|^2 + \|d\omega\|^2 = 0$.

Recuerdo sobre operadores auto-adjuntos: Si $T : V \rightarrow V$ es un operador auto-adjunto en $V \cong \mathbf{R}^m$ espacio vectorial de dimensión finita, entonces $\ker(T)$ es ortogonal a $\text{Im}(T)$ dado que

$$\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle = 0 \text{ para todo } u \in \ker(T).$$

Además, dado que dichos espacios tienen dimensión complementaria (por el Teorema del rango) tenemos que $V = \ker(T) \oplus^\perp \text{Im}(T)$. Lo mismo ocurre si T es un operador en espacio de Hilbert.

Sin embargo, los espacios de p -formas diferenciales $\mathcal{A}^p(M)$ **no son** espacios de Hilbert, y por ende se requieren herramientas extra de Análisis Funcional para obtener dicha descomposición en el caso de $T = \Delta_g$ y $V = \mathcal{A}^p(M)$.

⁴i.e., $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_p} : E_p \times E_p \rightarrow \mathbf{R}$ es una familia suave de productos escalares parametrizadas por los puntos $p \in M$.