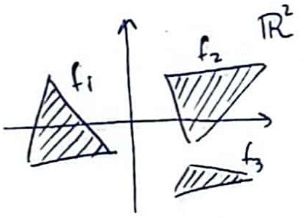
Cohomología singular

Sea X espacio topológico, $U \subseteq X$ abierto y G gr. abeliano.

$$C_k(U,G) := \{k\text{-cadenas sobre } U\}$$
$$\overset{def}{=} \{\textstyle\sum n_i f_i \ : n_i \in G, \ f_i \subseteq U \ k\text{-simplex}\}$$

Definimos el prehaz de cocadenas singulares (con coef. en G)

$$C^k_{sing}(U) := \mathrm{Hom}(C_k(U), G), \quad U \subseteq X$$



$$\sigma := 4f_1 + 5f_2 - 2f_3 \in C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z})$$

$$\alpha : C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\textstyle\sum n_i f_i \longmapsto \sum n_i$$

$$\Rightarrow \alpha \in C^2_{sing}(\mathbb{R}^2) \quad \text{y} \quad \alpha(\sigma) = 4+5-2 = 7$$

Existe una aplicación de coborde

$$\delta : C^k_{sing}(X) \longrightarrow C^{k+1}_{sing}(X)$$
$$\alpha \longmapsto \alpha \circ \partial$$

donde $\partial : C_{k+1}(X) \longrightarrow C_k(X)$ es la aplicación de borde.

Se obtiene un complejo $(C^\bullet_{sing}(X), \delta)$.

$$\Rightarrow H^i_{sing}(X,G) := \frac{\ker(\delta : C^i(X,G) \to C^{i+1}(X,G))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{i-1}(X,G) \to C^i(X,G))}$$

son los grupos de cohomología singulares de X con coef. en G.

Teo: Sea X e.t. loc. contractil. Entonces

$$H^k(X,G) \cong H^k_{sing}(X,G)$$

Recordar que si X es var. analítica, entonces es loc. contractil.

Teo: Sea X var. analítica, con $G = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tenemos además que

$$H^k(X,\mathbb{R}) \cong H^k_{sing}(X,\mathbb{R}) \cong H^k_{dR}(X)$$

Históricamente, se buscaba relacionar los grupos

$$H_q(X,\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad H_q(X,G)$$

<u>Teo</u> (de los coef. universales homológicos): La secuencia

$$0 \to H_q(X,\mathbb{Z})\otimes G \to H_q(X,G) \to \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}),G) \to 0$$

es exacta. Escinde, no canónicamente.

¿Como definir y calcular $\mathrm{Tor}(A,B)$?

<u>Def</u>: Sea A gr. abeliano. Una <u>resolución libre</u> de A es, una secuencia exacta

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

donde cada F_i es libre.

<u>Teo</u>: Todo gr. abeliano A admite una resolución libre

$$0 \to R \hookrightarrow F \twoheadrightarrow A \to 0$$

<u>Dem</u>: Considere $F := \mathbb{Z}[A]$ y la proyección $\mathbb{Z}[A] \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$.
Sea $R := \ker(p) \subseteq \mathbb{Z}[A]$, luego

$$0 \to \ker(p) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}[A] \overset{p}{\twoheadrightarrow} A \to 0$$

es exacto. $\square$

Sean A,B gr. abelianos. Considere una resolución libre de A

$$0 \to F_1 \overset{h}{\hookrightarrow} F_0 \overset{k}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow 0$$

$$\overset{(\cdot)\otimes B}{\Longrightarrow} \qquad F_1\otimes B \xrightarrow{h\otimes 1} F_0\otimes B \xrightarrow{k\otimes 1} A\otimes B \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \to \underbrace{\ker(h\otimes 1)}_{:=\mathrm{Tor}(A,B)} \overset{i}{\hookrightarrow} F_1\otimes B \longrightarrow F_0\otimes B \twoheadrightarrow A\otimes B \longrightarrow 0$$

En la práctica, $\mathrm{Tor}(A,B)$ es cualquier grupo T que extiende la exactitud de $(\star)$.

<u>Teo</u>: $\mathrm{Tor}(A,B)$ no depende de la resolución escogida de A.

Ej: Calcular $\mathrm{Tor}(\underbrace{\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}}_{A}, \underbrace{\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}}_{B})$

Notar que

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\times 60} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \underbrace{\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}}_{A} \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de A.

$$\overset{(\cdot)\otimes B}{\Longrightarrow} \quad T \longrightarrow \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 60} \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

$$\begin{aligned} T := \mathrm{Ker}((\times 60)) &\overset{def}{=} \{ n \in \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} : 60n = 0 \text{ en } \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \} \\ &= 7\mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \quad (\text{pues } \mathrm{mcd}(42,60) = 6 \text{ y } \tfrac{42}{6} = 7) \\ &\cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z}/\mathrm{mcd}(42,60)\mathbb{Z} = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/42\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Prop: (1) $\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(B,A)$ (no trivial a priori !)

(2) Si A o B es libre, o libre de torsión, entonces

$$\mathrm{Tor}(A,B) = 0$$

(3) Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong \{ x \in A : nx = 0 \}$$

en particular,

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathrm{mcd}(n,m)\mathbb{Z}$$

Dem: (3) es consecuencia de los cálculos del ejemplo anterior.

(2) Si B es libre, entonces si

$$0 \to F_1 \hookrightarrow F_2 \twoheadrightarrow A \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{0}} \longrightarrow F_1 \otimes B \hookrightarrow F_2 \otimes B \twoheadrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

es exacta, pues $(\cdot)\otimes B$ es exacto si B es libre.

$$\Rightarrow \mathrm{Tor}(A,B) = 0$$

Si A es libre, basta usar (1).

(...) (1) Sean

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^m \hookrightarrow \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow A \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^p \hookrightarrow \mathbb{Z}^q \twoheadrightarrow B \longrightarrow 0$$

resoluciones libres de A y B respectivamente

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \mathrm{Tor}(B,A) \arrow[d, hook] & \\
(\star)\otimes\mathbb{Z}^p \Rightarrow & & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^m\otimes\mathbb{Z}^p \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}^n\otimes\mathbb{Z}^p \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A\otimes\mathbb{Z}^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(\star)\otimes\mathbb{Z}^q \Rightarrow & & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^m\otimes\mathbb{Z}^q \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{Z}^n\otimes\mathbb{Z}^q \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A\otimes\mathbb{Z}^q \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
(\star)\otimes B \Rightarrow & 0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}(A,B) \arrow[r, hook] & \mathbb{Z}^m\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}^n\otimes B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama exacto, notar que al tensorisar por B debemos de completar con el grupo de torsión.
Un argumento típico de cacería de diagrama permite definir un morfismo

$$\varphi : \mathrm{Tor}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}(B,A),$$

y por simetría, también tenemos

$$\psi : \mathrm{Tor}(B,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}(A,B)$$

y como estos morfismos hacen al diagrama conmutativo, se obtiene que

$$\varphi\circ\psi = \mathrm{Id} \quad \text{y} \quad \psi\circ\varphi = \mathrm{Id}$$

Luego, φ es isomorfismo. $\square$

Teo. coef. universales homológicos implica que

$$H_q(X,G) \cong (H_q(X,\mathbb{Z})\otimes G) \oplus (\mathrm{Tor}(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}),G))$$

Ej: Sea $X = \mathbb{RP}^n$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$H_i(\mathbb{RP}^n,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0,\ i=n,\ \text{impar} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & 0<i<n,\ \text{impar} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H_i(\underbrace{\mathbb{RP}^n}_{X}, \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{G}) \cong \underbrace{(H_i(\mathbb{RP}^n,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{\text{conocido}} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(H_{i-1}(\mathbb{RP}^n),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{=0 \text{ ó } =\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \checkmark$$

<u>Teo</u> (de los coef. universales cohomológicos): la secuencia

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}), G) \to H^q(X,G) \to \mathrm{Hom}(H_q(X,\mathbb{Z}), G) \to 0$$

es exacto. Escinde, no canónicamente.

$\mathrm{Ext}(\cdot,\cdot)$ se define de manera dual al $\mathrm{Tor}(\cdot,\cdot)$.

<u>Paso 1</u>: $0 \to F_1 \hookrightarrow F_0 \twoheadrightarrow A \to 0$ resolución libre

<u>Paso 2</u>: $0 \leftarrow ?? \leftarrow \mathrm{Hom}(F_1,B) \leftarrow \mathrm{Hom}(F_0,B) \hookleftarrow \mathrm{Hom}(A,B) \leftarrow 0$

Se define $\mathrm{Ext}(A,B)$ como el único grupo que arregla la exactitud de la secuencia anterior.

<u>Prop</u>: (1) A gr. abeliano libre $\Rightarrow \mathrm{Ext}(A,B)=0$

(2) B divisible $\Rightarrow \mathrm{Ext}(A,B)=0$

(3) $\mathrm{Ext}(\oplus A_\alpha, B) \cong \oplus\, \mathrm{Ext}(A_\alpha, B)$

$\mathrm{Ext}(A, \oplus B_\alpha) \cong \oplus\, \mathrm{Ext}(A, B_\alpha)$

(4) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \cong B/nB$

(5) $\mathrm{Ext}(H_k(X), \mathbb{Z}) \cong T_k$, donde T_k es el sub grupo de torsión de $H_k(X)$.

Teo. coef. universales cohomológicos implica que

$$H^q(X,G) \cong \mathrm{Ext}(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}), G) \oplus \mathrm{Hom}(H_q(X,\mathbb{Z}), G)$$

<u>Teo</u>: Sea X con $H_q(X)$ finitamente generado, entonces

$$H^q(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_{q-1}$$

<u>Dem</u>: Usando el teorema anterior con $G=\mathbb{Z}$:

$$\Rightarrow \mathrm{Ext}(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong T_{q-1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}(H_q(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r \oplus \oplus\, \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

$$\cong \bigoplus_{k=1}^{r} \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}} \oplus \bigoplus \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=0}$$

$$\cong \mathbb{Z}^r$$

Luego, $H^q(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_{q-1}$ $\square$

Es decir, si $H_q(X)$ es fin. gen., entonces $H^q(X)$ es la parte libre de $H_q(X)$, más el sub grupo de torsión de $H_{q-1}(X)$.

<u>Teo</u> (Künnet homológico): La secuencia

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=q} H_i(X,G) \otimes H_j(Y,G) \hookrightarrow H_q(X \times Y, G) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i+j=q-1} \mathrm{Tor}(H_i(X,G), H_j(Y,G)) \to 0$$

es exacta.

<u>Teo</u> (Künnet cohomológico): Si $H_i(X)$ es fin. gen. $\forall i$, y X o bien Y tiene todos sus grupos de cohomología libre de torsión, entonces

$$\bigoplus_{i+j=q} H^i(X,\mathbb{Z}) \otimes H^j(Y,\mathbb{Z}) \cong H^q(X \times Y, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo canónico.