Seminario THC 2: Topología de pinceles afines

Def: Sea X espacio topológico. Una retracción por deformación de X en un subespacio $A\subseteq X$ es una función continua $f: X\times[0,1]\to X$ tal que $f|_{X\times\{0\}}=id_X$, $f(X\times\{1\})\subseteq A$ y $f|_{A\times\{1\}}=id_A$, i.e. es una homotopía entre id_X y una retracción de X en A. En particular, A y X son homotópicos. Si además ~~R~~ $\subseteq A$, decimos que f es retracción por deformación fuerte si $f|_{A\times\{t\}}=id_A\ \forall t\in[0,1]$.

Teorema (Ehresmann): Sea $f: Y\to B$ una submersión propia (sin valores críticos y con fibras compactas) entre variedades diferenciables (reales) C^∞. Entonces f es una fibración localmente trivial, i.e. $\forall b\in B\ \exists U$ abto y

$$\begin{tikzcd} U\times f^{-1}(b) \arrow[rr, "\overset{C^\infty}{\sim}"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Obs: Si $N\subseteq Y$ es subvariedad cerrada t.q. $f|_N: N\to B$ es submersión, entonces podemos tomar fibración localmente trivial sobre N

$$\begin{tikzcd} U\times(f|_N^{-1}(b)) \arrow[rr, "\overset{C^\infty}{\sim}", "\varphi"'] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=-90] & & f|_N^{-1}(U)=f^{-1}(U)\cap N \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=-90] \\ U\times f^{-1}(b) \arrow[rr, "\overset{C^\infty}{\sim}", "\varphi"'] \arrow[dr, "pr_1"'] & \square & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Proposición: Sea $f: Y\to B$ C^∞ propia y $C\subseteq B$ conjunto de valores críticos de f. Sean $R\subseteq A\subseteq S\subseteq B$ t.q. $S\cap C\subseteq Int(R)$, luego toda retracción por deformación fuerte de S a A sobre R se levanta a una retracción de $f^{-1}(S)$ a $f^{-1}(A)$ sobre $f^{-1}(R)$.

Construcción de Lefschetz: Sea X variedad compleja proyectiva suave, $Z\subseteq X$ sección hiperplana suave, $Y\in|k\cdot Z|$ genérico (i.e. Y suave, $Y\pitchfork Z$ transversal). Luego $Y-k\cdot Z=\mathrm{div}(f)$ con $f: X\dashrightarrow\mathbb{P}^1$ función racional ($f^{-1}(0)=Y$, $f^{-1}(\infty)=k\cdot Z$)

$$\leadsto \hat f: Bl_{Y\cap Z}(X)\longrightarrow\mathbb{P}^1 \text{ regular}$$

$$\hat f^{-1}(p)\simeq f^{-1}(p) \text{ sección hiperplana de } X \text{ en } |k\cdot Z|\supseteq \ell_{Y,k\cdot Z}\cong\mathbb{P}^1.$$

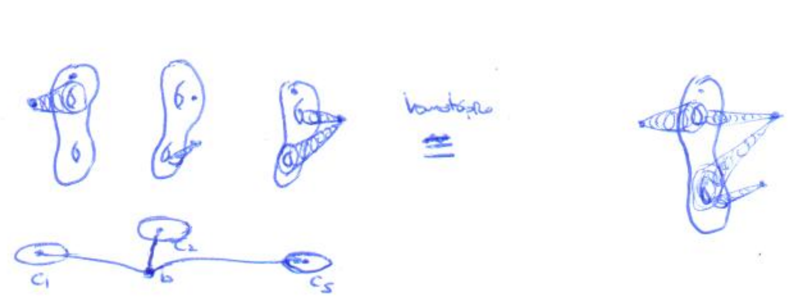
Ej: $X=\mathbb{P}^2$

Teorema: Sea E una variedad compleja compacta, $D\subseteq E$ una subvariedad de codim 1 y sea $f: E\to\mathbb{P}^1$ holomorfa. Sean $C=\{c_1,\dots,c_s\}\subseteq\mathbb{P}^1$ los valores críticos y fije $\infty\in\mathbb{P}^1$ (∞ podría estar en C). Si $f|_D$ no tiene valores críticos en $\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$ y $f|_{E\setminus f^{-1}(\infty)}$ sólo tiene sing. aisladas, entonces

$$H_k(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D),\ f^{-1}(b)\setminus D)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}^\mu & \text{si } k=n\\ 0 & \text{si } k\neq n\end{cases}$$

$\forall b\in\mathbb{P}^1\setminus(C\cup\{\infty\})$.

Dem:



Andreotti-Frankel: X var. alg. compleja suave afín de dim n tiene tipo topológico de CW complejo dim n.

Teorema de excisión: Si X esp. top., $A \subseteq X$, y $\overline{U} \subseteq \mathrm{Int}(A) \Rightarrow H_*(X\setminus U, A\setminus U) \simeq H_*(X,A)$.

Luego $H_*(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D), f^{-1}(b)\setminus D) \simeq H_*(\tilde{E}\setminus(\cancel{f^{-1}(\infty)}\cup D), f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i)\setminus D)$

$$\simeq H_*(\tilde{E}\setminus(\cancel{f^{-1}(\infty)}\cup D)\cup f^{-1}(b), f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i))\setminus(f^{-1}(b)\cup D))$$

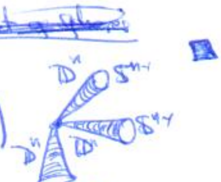
$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{s} H_*(f^{-1}(D_i), f^{-1}(b_i)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} H_*(\overline{f^{-1}(D_i)}, f^{-1}(b_i))$$

$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{j=1}^{n_i} \underbrace{H_*(B_{ij}, f^{-1}(b_i)\cap B_{ij})}_{\cong\ \mathbb{Z}^{\mu_{ij}}\ \text{Milnor}}$$

$f: B_{ij} \to \mathbb{C} \overset{\text{bihol}}{\simeq} \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$, $(z_1,\dots,z_n)\mapsto z_1^2+\dots+z_n^2$ si $\mu_{ij}=1$, donde $\mu_{ij} = \dim_{\mathbb{C}} \dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{D}^n,0}}{\langle \frac{\partial f}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\rangle}$ es el número de Milnor de la singularidad.

$$(B_{ij}, f^{-1}(b)\cap B_{ij}) \overset{\text{homotopía}}{\equiv} (\dots)$$

$$\cong (\overbrace{\mathbb{D}^n\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}^n}^{\mu_{ij}\text{ veces}}, \overbrace{S^{n-1}\sqcup\cdots\sqcup S^{n-1}}^{\mu_{ij}\text{ veces}})$$



Cor: X smooth proy var. dim n, Y, Z sec hip. gen. $Y\in|k\cdot Z|$

$$0 = H_n(Y\setminus Z) \to \underset{\mathbb{Z}^{\alpha}}{H_n(X\setminus Z)} \to \underset{\mathbb{Z}^{\mu}}{H_n(X\setminus Z, Y\setminus Z)} \xrightarrow{\partial} \underset{\mathbb{Z}^{\beta}}{H_{n-1}(Y\setminus Z)} \to H_{n-1}(X\setminus Z) \to 0$$

Def. $\pi_n(X,x_0)$ es el grupo de clases de homotopía de mapas $f: S^n \to X$, $a \mapsto x_0$,

$S^n \wedge S^n \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} X$.

Obs. $\pi_1(X,x_0)$ es el llamado grupo fundamental, $H_1(X,\mathbb{Z}) = \pi_1(X,x_0)^{ab} = \pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$.

Obs. Existe el concepto de $\pi_n(X,A,x_0)$ con $x_0\in A\subseteq X$, y viene con sec. exacta larga

$$\cdots \to \pi_n(A,x_0) \to \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(X,A,x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A,x_0) \to \cdots$$

Vale que $\pi_i(X,A,x_0)=0$ ssi $\forall\ (D^i,\partial D^i)\to(X,A)$ es homotópico a $D^i \xrightarrow[\text{rel }\partial D^i]{} A$.

Teorema (Lefschetz hip. homotópico) X var. proy. suave, Y sec. hip. suave $\Rightarrow \pi_i(X,Y,x_0)=0$ $\forall i=0,\dots,n-1$.

Cor: X hip. de $\mathbb{P}^{n+1}$, $n\geq 2$ ⇝ X simplemente conexa.

Cor: $X\subseteq\mathbb{P}^{n+1}$ de grado d $\Rightarrow H_n(X)=\mathbb{Z}^{\mu}$, $\mu = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+k}(d-1)^k + \alpha_n$, $\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ par}\end{cases}$

Dem: n par

$$\underset{0}{H_{n+2}(\mathbb{P}^{n+1}\setminus X)} \to \underset{\mathbb{Z}}{H_{n+2}(\mathbb{P}^{n+1})} \to H_n(X) \to \underset{\mathbb{Z}^{\mu}}{H_{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}\setminus X)} \to H_{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}) = 0$$

es libre

n impar

$$0 = H_{n+2}(X^d_{n+1}) \to H_n(X^d_n) \to H_{n+1}(X^d_{n+1}\setminus X^d_n) \simeq \mathbb{Z}^{\mu}$$

Dem: <u>$n=1$</u> $\quad H_1(X_1^d \setminus X_0^d) \simeq H_2(\mathbb{C}^2, X_1^d \setminus X_0^d)$, $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x_1,x_2) \mapsto x_1^d + x_2^d$

$$X_1^d = f^{-1}(1)$$

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{\langle x_1^{d-1}, x_2^{d-1}\rangle} = \underline{(d-1)^2}$$

$$\Rightarrow H_1(X_1^d) \simeq \mathbb{Z}^{(d-1)^2 - (d-1)} \quad \checkmark \underline{ok}$$

<u>$n>1$:</u>

$$0 = H_{n+1}(X_{n}^d \setminus X_{n-1}^d) \to H_{n+1}(X_n^d) \to H_{n-1}(X_{n-1}^d) \to H_n(X_n^d \setminus X_{n-1}^d) \to H_n(X_n^d) \to H_{n-2}(X_{n-1}^d) \to 0$$

<u>n par:</u> ✓	0	$\mathbb{Z}^{(d-1)^n - \dots + (-1)^n (d-1)}$	$\mathbb{Z}^{(d-1)^{n+1}}$		$\mathbb{Z}$
<u>n impar:</u>	$\mathbb{Z}$	$+1$			0