Seminario THC 12: IVHS

§ 1. Conexión de Gauss-Manin y IVHS

Def: Sea $\pi : X \to T$ una familia de variedades suaves proyectivas t.q. T es suave conexa y π es una submersión.
Luego (por Ehresmann) es una fibración localmente trivial

$$\begin{tikzcd} X_{t_0} \times \Delta \arrow[r, "\simeq", "\text{difeo } C^\infty"'] \arrow[d, "pr_2"'] & X_\Delta \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "\pi"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ t_0 \in \Delta \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & T & \end{tikzcd} \rightsquigarrow X_t \overset{C^\infty}{\simeq} X_{t_0} \Rightarrow H^k_{dR}(X_t) \simeq H^k_{dR}(X_{t_0})$$

Usando las trivializaciones locales podemos dotar de estructura de fibrado vectorial a

$$\mathcal{H}^k := \coprod_{t \in T} H^k_{dR}(X_t) \longrightarrow T \qquad (\underline{\text{fibrado de cohomología de De Rham}})$$

Denotamos $H^k_{\mathbb{Z}}$ el sub-haz de secciones $s \in \underline{\mathcal{H}^k}(U)$ t.q. $s(t) \in \operatorname{Im}(H^k(X_t, \mathbb{Z}) \to H^k_{dR}(X_t))$, $\forall t \in U$.

Obs: En términos algebraicos $H^k_{\mathbb{Z}} = R^k\pi_* \mathbb{Z}$ es el k-ésimo funtor derivado del funtor $\pi_* : (Sh_X) \to (Sh_T)$.
Este es un haz localmente constante también llamado un <u>sistema local</u>. Además $\mathcal{H}^k = \underbrace{R^k\pi_* \Omega^\bullet_{X/T}}_{=: \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)}$ donde el haz relativo

$$\Omega^p_{X/T} = \frac{\Omega^p_X}{\pi^*\Omega^1_T \wedge \Omega^{p-1}_X} \leftarrow \text{formas constantes a lo largo de campos tangentes a las fibras de } \pi$$

$$\simeq H^k_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_T = (R^k\pi_*\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{O}_T$$

En particular

$$(\mathcal{H}^k_{dR}(X/T))(U) = \mathbb{H}^k(X_U, \Omega^\bullet_{X_U/U})$$

luego posee una filtración natural $(\mathcal{F}^p \mathcal{H}^k_{dR}(X/T))(U) = F^p \mathbb{H}^k(X_U, \Omega^\bullet_{X_U/U}) \overset{\text{deg. en } E_1}{\simeq} \mathbb{H}^k(X_U, \Omega^{\bullet \geq p}_{X_U/U})$, la llamada <u>filtración de Hodge</u>. Los $\mathcal{F}^p\mathcal{H}^k_{dR}(X/T)$ son también llamados <u>fibrados de Hodge</u>.

Def: Para todo sistema local L sobre una variedad suave T, existe una <u>conexión plana inducida</u> en $\underbrace{L \otimes \mathcal{O}_T}_{=: \mathcal{L}}$, ($\mathcal{L}$ ← fibrado vectorial)
la llamada <u>Conexión de Gauss-Manin</u>

$$\nabla : \underbrace{L \otimes \mathcal{O}_T}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \Omega^1_T \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} \underbrace{(L \otimes \mathcal{O}_T)}_{\mathcal{L}}$$

dada por $\nabla\left(\sum_{i=1}^r f_i \lambda_i\right) := \sum_{i=1}^r df_i \otimes \lambda_i$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in L(U)$ es una base (sobre $\mathbb{Z}$), y

$f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_T(U)$. Esta conexión cumple:

(1) <u>Leibniz</u>: $\nabla(f \cdot \omega) = f \cdot \nabla\omega + df \otimes \omega$

(2) $\nabla(L) \equiv 0$

(3) $\nabla \circ \nabla \equiv 0$ (plana)

Es posible describir esta conexión en términos algebraicos

$$\nabla : \mathcal{H}^k_{dR}(X/T) \longrightarrow \Omega^1_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)$$

localmente $U \subseteq T$ (afín) del modo siguiente (Katz-Oda '68)

$$\left(\exists\, t_i \text{ t.q. } \Omega^1_T(U) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_T(U)\, dt_i\right)$$

$$\omega = \sum_{j=0}^{k} \omega^j \in \mathbb{H}^k(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X_U/U})$$ con $\mathcal{U}$ cobertura afín de $X_U = \pi^{-1}(U)$

con cada $\omega^j \in C^{k-j}(\mathcal{U}, \Omega^j_{X_U/U})$. Sea $p : \Omega^j_{X_U} \to \Omega^j_{X_U/U}$ la proy. natural, entonces existe

$$\check{\omega} = \sum_{j=0}^{k} \check{\omega}^j \in \bigoplus_{j=0}^{k} C^{k-j}(\mathcal{U}, \Omega^j_{X_U}) \quad \text{t.q. } p(\check{\omega}) = \omega.$$

Como $p(D\check{\omega}) = D\, p(\check{\omega}) = D\omega = 0$, sigue que

$$D\check{\omega} = \sum_{j=0}^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{m} dt_i \wedge \eta_i^{j-1} \right) \in \bigoplus_{j=0}^{k} C^{k+1-j}(\mathcal{U}, \pi^*\Omega^1_U \wedge \Omega^{j-1}_{X_U}) \quad (\text{con } \eta_i^{-1} = 0)$$

Tomando

$$\eta_i := \sum_{j=0}^{k} \eta_i^j \in \bigoplus_{j=0}^{k} C^{k-j}(\mathcal{U}, \Omega^j_{X_U})$$

definimos

$$\nabla(\omega) := \sum_{i=1}^{m} dt_i \otimes p(\eta_i) \in \Omega^1_T(U) \otimes_{\mathcal{O}_T(U)} \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)(U).$$

__Corolario:__ (Transversalidad de Griffiths) $\nabla \mathcal{F}^p \mathcal{H}^k_{dR}(X/T) \subseteq \Omega^1_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}^{p-1} \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)$.

Dem: $\omega \in \mathcal{F}^p \mathcal{H}^k_{dR}(X/T) = \mathbb{H}^k(\mathcal{U}, \Omega^{\bullet \geq p}_{X_U/U})$

$$\omega = \sum_{j=p}^{k} \omega^j \Rightarrow \check{\omega} = \sum_{j=p}^{k} \check{\omega}^j \Rightarrow D\check{\omega} = \sum_{j=p}^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{m} dt_i \wedge \eta_i^{j-1} \right) \Rightarrow \nabla\omega = \sum_{i=1}^{m} dt_i \otimes \left(\sum_{j=p}^{k+1} p(\eta_i^{j-1}) \right)$$
$$\in \Omega^1_T(U) \otimes_{\mathcal{O}_T(U)} \mathbb{H}^k(\mathcal{U}, \Omega^{\bullet \geq p-1}_{X_U/U}) \quad \blacksquare$$

Luego tenemos

$$\nabla : \underset{\substack{\cong \\ R^{k-p}\pi_* \Omega^p_{X/T}}}{\frac{\mathcal{F}^p \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)}{\mathcal{F}^{p+1} \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)}} \longrightarrow \Omega^1_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \underset{\substack{\cong \\ R^{k-p+1}\pi_* \Omega^{p-1}_{X/T}}}{\frac{\mathcal{F}^{p-1} \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)}{\mathcal{F}^{p} \mathcal{H}^k_{dR}(X/T)}}$$

Dualizando obtenemos

$$\overline{\nabla} : T_T \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}\left(R^{k-p}\pi_* \Omega^p_{X/T},\ R^{k-p+1}\pi_* \Omega^{p-1}_{X/T} \right)$$

y especializando en cada $t \in T$ obtenemos

$$\overline{\nabla}_t : T_t T \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\underset{\substack{\cong \\ H^{k-p}(X_t, \Omega^p_{X_t})}}{H^{p,k-p}(X_t)},\ \underset{\substack{\cong \\ H^{k-p+1}(X_t, \Omega^{p-1}_{X_t})}}{H^{p-1,k-p+1}(X_t)} \right).$$

Por otro lado, tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \to \pi^* \Omega^1_T \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X/T} \to 0$$

cuyo dual es

$$0 \to T_{X/T} \to T_X \to \pi^* T_T \to 0$$

y cuyo mapa de conexión en cohomología induce

$$H^0(T_T) \xrightarrow{KS} H^1(X, T_{X/T}).$$

Cuya especialización es el
el llamado <u>mapa de Kodaira-Spencer</u>:

$$KS: T_t T \to H^1(X_t, T_{X_t}).$$

Por un teorema de Griffiths se tiene que $\overline{\nabla}_t$ se factoriza por KS dando lugar al mapa de <u>variaciones infinitesimales de estructuras de Hodge (IVHS)</u>:

$$\nabla: H^1(X_t, T_{X_t}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(H^{k-p}(\Omega^p_{X_t}), H^{k-p+1}(\Omega^{p-1}_{X_t})\right)$$

y corresponde (salvo producto escalar no nulo) con el <u>producto cup</u>

$$(\nabla(v))(\omega) = * \cdot v \cup \omega \in H^{k-p+1}(\Omega^p_{X_t} \otimes T_{X_t}) = H^{k-p+1}(\Omega^{p-1}_{X_t}).$$

---

§2. Locus de Hodge

Def: Sea X var. alg. proy. suave, $Z \subseteq X$ subvar. de codim. k, su <u>clase</u> es

$$[Z] \in H^{2k}_{dR}(X) : \int_Z \omega = \int_X [Z] \wedge \omega \quad \forall \omega \in H^{2n-2k}_{dR}(X).$$

Obs: $[Z] \in H^{k,k}(X)$ ya que si $\omega = \sum_{p+q=2n-k} \omega^{p,q} \leftarrow (p,q)$-forma armónica

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } p>q \Rightarrow p>n-k \Rightarrow \omega^{p,q}|_Z \equiv 0 \\ \text{si } p<q \Rightarrow q>n-k \Rightarrow \omega^{p,q}|_Z \equiv 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_Z \omega = \int_Z \omega^{n-k,n-k}$$

Luego si $\omega^{p,q}$ con $p \neq q \Rightarrow \int_Z \omega^{p,q} = 0 = \int_X [Z] \wedge \omega^{p,q} = \int_X [Z]^{n-p,n-q} \wedge \omega^{p,q}$

$$\Rightarrow [Z]^{n-p,n-q} \wedge \omega^{p,q} = 0 \quad \forall \omega^{p,q} \Rightarrow [Z]^{n-p,n-q} = 0 \;\forall p \neq q \Rightarrow [Z] = [Z]^{k,k}.$$

Def: Una clase $\lambda \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X,\underset{\mathbb{Z}}{\mathbb{Q}})$ es llamada un ciclo de Hodge (integral).

Obs: Si $Z_1, \dots, Z_m \subseteq X$ son subvar. alg. de codim k y $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} n_i [Z_i] \text{ es un ciclo de Hodge. (Integral)}$$

Decimos que un tal ciclo es un ciclo algebraico, luego todo ciclo algebraico es ciclo de Hodge.

Conjetura de Hodge: Todo ciclo de Hodge es algebraico.

Def: Sea $\pi : X \to T$ familia de var. proy. suaves, submersión localmente trivial.

$$t_0 \in T, \quad \lambda_0 \in H^{k,k}(X_{t_0}) \cap H^{2k}(X_{t_0}, \mathbb{Z})$$

El locus de Hodge de λ_0 es

gérmen de vecindad analítica

fns. holomorfas

secciones hol. de $\mathcal{F}^{k+1}$

$$V_{\lambda_0} = \{ t \in (T, t_0) : \lambda_t \in H^{k,k}(X_t) \} = \{ t : \int_X \lambda_t \wedge \omega_t^{p,q} = 0, \ p \neq q \}$$

es t.f.

$$X_{t_0} \simeq X_t$$

$$\lambda_0 \longmapsto \lambda_t \in H^{2k}(X_t, \mathbb{Z})$$

Conj. Hodge Variacional: λ_0 es algebraico $\Leftrightarrow$ λ_t es algebraico $\forall t \in V_{\lambda_0}$.

Teo (Cattani–Deligne–Kaplan 1994) Al extender analíticamente V_{λ_0} a todo T por monodromía obtenemos variedades algebraicas.

Prop: Sea $\lambda_0 \in H^{k,k}(X_{t_0}) \cap H^{2k}(X_{t_0}, \mathbb{Z})$ y

$$\overline{\nabla}_{t_0}^{\lambda_0} : T_{t_0} T \longrightarrow \left(H^{k+1,k-1}(X_{t_0}) \right)^*$$

$$v \longmapsto \left(\omega \longmapsto \int_X (\overline{\nabla}_{t_0}(v))(\omega) \wedge \lambda_{t_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Ker} \overline{\nabla}_{t_0}^{\lambda} = T_{t_0} V_{\lambda_0}}$$

Dem:

$$V_{\lambda_0} = \{ \int_X \omega^{p,q} \wedge \lambda_{t_0} = 0, \ p \neq q \} \Rightarrow T_{t_0} V_{\lambda_0} = \{ v \in T_{t_0}T : \frac{\partial}{\partial v} \left(\int_X \omega^{p,q} \wedge \lambda_{t_0} \right) = 0, \ p \neq q \}$$

$$= \{ \int_X \underbrace{\overline{\nabla}_{t_0}(v)(\omega^{p,q})}_{\in H^{p-1,q+1}} \wedge \lambda_{t_0} = 0, \ p \neq q \} = \{ \int_X \overline{\nabla}_{t_0}(v)(\omega^{k+1,k-1}) \wedge \lambda_{t_0} = 0 \}$$

§3. El caso de hipersuperficies

Sea $\pi: X \to T$ la familia de todas las hip. suaves de $\mathbb{P}^{n+1}$ de grado d, i.e.

$$T \subseteq \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n+1}]_d \text{ abierto}$$

$$t \in T \sim X_t = \{f_t = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}.$$

Teo: (Carlson-Green-Griffiths-Harris IVHS):

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\nabla}_t : & T_t T & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(H^{p,q}(X_t)_{prim}, & H^{p-1,q+1}(X_t)_{prim}\big) \\ & \wr\wr & & \wr\wr & \wr\wr \\ & \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n+1}]_d & & R^t_{d(q+1)-n-2} & R^t_{d(q+2)-n-2} \end{array}$$

$$P \longmapsto (Q \longmapsto P\cdot Q).$$

Obs. $H^{p,q}(X_t)_{prim} = \ker\big(H^{p,q}(X_t) \xrightarrow{\cup\theta} H^{p+1,q+1}(X_t)\big) \Rightarrow$ si $\omega \in H^{p,q}(X_t)_{prim} \Rightarrow \nabla \cup \omega \in H^{p-1,q+1}(X_t)_{prim}$.

Cor: (Noether-Lefschetz generalizado) Si $X_t \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ es una hip. muy general de dim par $\Rightarrow H^{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(X_t)\cap H^n(X_t,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\cdot\theta^{\frac{n}{2}}|_{X_t}$
$d \geq 2+\frac{4}{n}$

Dem: Af1: Si $\lambda_{t_0} \in H^{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(X_{t_0})\cap H^n(X_{t_0},\mathbb{Q})$ es tq $(\lambda_{t_0})_{prim}\neq 0 \Rightarrow V_{\lambda_{t_0}} \subsetneq (T,t_0)$.

En efecto, si $V_\lambda = (T,t_0) \Rightarrow T_{t_0}V_\lambda = T_{t_0}T$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}^{\lambda}_{t_0}: T_{t_0}T \to \big(H^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}(X_{t_0})\big)^* \text{ es cero}$$

$$\begin{array}{ccc} \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n+1}]_d & & R^{t_0}_{d(\frac{n}{2})-n-2} \end{array} \longrightarrow d\tfrac{n}{2}-n-2\geq 0 \iff d \geq 2+\tfrac{4}{n}$$

$$P \longmapsto \left(Q \longmapsto \int_{X_{t_0}} \mathrm{res}\left(\frac{PQ\Omega}{f^{\frac{n}{2}+1}}\right)\wedge\lambda\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{res}\left(\frac{PQ\Omega}{f^{\frac{n}{2}+1}}\right)\wedge\lambda = 0 \quad \forall P,Q$$

$$\Rightarrow \omega\wedge\lambda_0 = 0 \quad \forall\, \omega \in H^{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(X_{t_0})_{prim}$$

$$\lambda_0 = (\lambda_0)_{prim} + a\cdot\theta^{\frac{n}{2}}|_{X_{t_0}}$$

$$\Rightarrow \omega\wedge(\lambda_0)_{prim}=0 \quad \forall\, \omega\in H^{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(X_{t_0})_{prim}$$

$$\Rightarrow \omega\wedge(\lambda_0)_{prim}=0 \quad \forall\, \omega\in H^n_{dR}(X_{t_0})$$

$$\Rightarrow (\lambda_0)_{prim}=0 \quad //$$

Paso 2: Tomar cobertura numerable de T por abiertos simplemente conexos, sobre cada uno $R^{\frac{n}{2}}\pi_*\mathbb{Z}$ es trivial, luego hay una cant. numerable de Hodge locus de codim ≥ 1 en T

$$\Rightarrow \operatorname{codim}\{t\in T: H^{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(X_t)_{prim}\cap H^n(X_t,\mathbb{Q})\neq 0\}\geq 1 \quad // \ \blacksquare$$

Cor (NL) Si $X\subseteq\mathbb{P}^3$ sup. de grado $d\geq 4$ muy general $\Rightarrow \rho(X)=1$. / Dem: Sec. exp. $0\to\mathbb{Z}\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X^*\to 0$
$H^1(\mathcal{O}_X)=0 \to H^1(\mathcal{O}_X^*)=\mathrm{Pic}(X)\hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$ // $\blacksquare$