Seminario THC (Semana 10): "Secuencias espectrales y Cohom. de de Rham algebraica" (1)

La vez pasada: X variedad compleja suave, $\mathbb{H}^k(X^{an}, \Omega^\bullet_{X^{an}}) \cong \mathbb{H}^k(X, \Omega^\bullet_{X_\infty}) \cong H^k_{dR}(X)$.

§ 1. Secuencias Espectrales

Trabajamos en la categoría $(\mathrm{Grp\,Ab})$ de grupos abelianos.

Def: Un complejo filtrado es un complejo $A^\bullet$ de grupos ab. con una filtración decreciente $F^\bullet A^\bullet$: $A^\bullet = F^0 A^\bullet \supseteq F^1 A^\bullet \supseteq F^2 A^\bullet \supseteq \dots \supseteq F^p A^\bullet \supseteq \dots$
donde cada $F^p A^\bullet$ es un complejo de grupos ab, tal que $\forall k \geq 0$, $\exists\, l = l(k) \geq 0$ tal que $F^l A^k = 0$.

Obs: Si $F^\bullet A^\bullet$ complejo filtrado $\Rightarrow$ Filtración en cohomología $F^p H^k(A^\bullet)$ dada por $\mathrm{Im}\left(H^k(F^p A^\bullet) \to H^k(A^\bullet)\right)$. La secuencia espectral es algo que relaciona
$\mathrm{Gr}^p_F\, H^k(A^\bullet) = F^p H^k(A^\bullet) / F^{p+1} H^k(A^\bullet)$ con $H^k(\mathrm{Gr}^p_F A^\bullet) = H^k(F^p A^\bullet / F^{p+1} A^\bullet)$

Teo/Def: Dados $(F^\bullet A^\bullet, d)$ existen complejos de grupos abelianos para cada $r \geq 0$
$$(E_r^{p,q}, d_r) \quad , \quad d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$$

(1) $E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^p_F\, A^{p+q} = \dfrac{F^p A^{p+q}}{F^{p+1} A^{p+q}}$, $d_0 : E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p,q+1}$ es el morfismo inducido por d.

(2) $$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker\left(E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r,\, q-r+1}\right)}{\mathrm{Im}\left(E_r^{p-r,\, q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q}\right)}$$

(3) Para $p+q$ fijo y $r \gg 0$: $E_r^{p,q} = \mathrm{Gr}^p_F\, H^{p,q}(A^\bullet) =: E_\infty^{p,q}$.

Esto es la llamada secuencia espectral del $F^\bullet A^\bullet$, decimos que $(E_r^{p,q}, d_r)$ es la página r y decimos que la secuencia límite con $H^{p+q}(A^\bullet)$ y se denota $E_r^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(A^\bullet)$

$$\begin{tikzcd}
E^{0,3} \arrow[drr, "d_2"] & E^{1,3} & E^{2,3} & E^{3,3} \\
E^{0,2} \arrow[u, "d_0"] \arrow[ddrrr, "d_3"] & E^{1,2} & E^{2,2} & E^{3,2} \\
E^{0,1} \arrow[r, "d_1"] & E^{1,1} & E^{2,1} & E^{3,1} \\
E^{0,0} & E^{1,0} & E^{2,0} & E^{3,0}
\end{tikzcd}$$

Def: Decimos que la sec. espectral degenera en E_r si $d_k \equiv 0$ $\forall k \geq r$.
$\Longleftrightarrow E_r^{p,q} = E_k^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ $\forall p,q$ $\forall k \geq r$.

Obs: $$E_1^{p,q} \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\ker\left(E_0^{p,q} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q+1}\right)}{\mathrm{Im}\left(E_0^{p,q-1} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q}\right)} = H^{p+q}\left(F^p A^\bullet / F^{p+1} A^\bullet\right) \overset{\mathrm{def}}{=} H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^p_F A^\bullet\right)$$

¿Cuándo $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$, i.e., la secuencia degenera en E_1?

Def: Todo complejo de haces $\mathcal{F}^\bullet$ sobre un esp. top. X induce una filtración (inocente) en hipercohomología

$$F^p \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) := \operatorname{Im}\left(\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^{\bullet \geq p}) \to \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet)\right)$$

donde $\mathcal{F}^{\bullet \geq p}$: $0 \to \dots \to 0 \to \mathcal{F}^p \to \mathcal{F}^{p+1} \to \dots$

$0 \to \dots \to 0 \to 0 \to \mathcal{F}^{p+1} \to \dots$

y así $Gr_F^p \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^p[p]$.

Esta filtración es inducida por un complejo filtrado de grupos abelianos

$\mathcal{F}^\bullet \hookrightarrow \mathcal{I}^{\bullet,\bullet}$ resolución Γ-acíclica.

Sea $\mathcal{L}^k := \bigoplus_{r+s=k} \Gamma(\mathcal{I}^{r,s})$ secc. globales del complejo simple asoc. a $\mathcal{I}^{\bullet,\bullet}$

con $D = d_2 + (-1)^q d_1$

Así, $F^p \mathcal{L}^k := \bigoplus_{\substack{r+s=k \\ r \geq p}} \Gamma(\mathcal{I}^{r,s}) \rightsquigarrow F^\bullet \mathcal{L}^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}^{0,1} \arrow[r] & \mathcal{I}^{1,1} \arrow[r] & \mathcal{I}^{2,1} \arrow[r] & \mathcal{I}^{2,2} \\
\mathcal{I}^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}^{2,0} \arrow[r, "d_1"] \arrow[u] & \mathcal{I}^{3,0} \arrow[u, "d_2"'] \\
\mathcal{F}^0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^1 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^2 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^3 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow H^k(F^p \mathcal{L}^\bullet) = \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^{\bullet \geq p})$$

$$H^k(\mathcal{L}^\bullet) = \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet)$$

La filtración en cohom. es la filtración inocente en hipercohomología!

$$E_0^{p,q} = Gr_F^p \mathcal{L}^{p+q} = \frac{F^p \mathcal{L}^{p+q}}{F^{p+1} \mathcal{L}^{p+q}} = \Gamma(\mathcal{I}^{p,q}) \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q+1} = \Gamma(\mathcal{I}^{p,q+1})$$

$$\Longrightarrow E_1^{p,q} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{I}^{p,\bullet} \text{ resol de } \mathcal{F}^p}}{=} H^q(X, \mathcal{F}^p).$$

Conclusión: La sec. espectral asoc. a la filtración inocente degenera en E_1

$$\Longleftrightarrow E_\infty^{p,q} \underset{\text{def}}{=} \frac{F^p \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet)}{F^{p+1} \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet)} \simeq H^q(X, \mathcal{F}^p) \underset{\text{def}}{=} E_1^{p,q}$$

Def: Si X var. compleja suave, la sec. espectral asociada a la filtración inocente del complejo $(\Omega^\bullet_{X^{an}}, \partial)$ es llamada sucesión espectral de Frölicher

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X^{an}}) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^\bullet_{X^{an}}) \simeq H^{p+q}_{dR}(X).$$

$$H^q(X, \Omega^p_{X^{an}}) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

Obs: Teo. de desc. de Hodge $\Rightarrow$ Sec. de Frölicher en E_1 si X compacta Kähler.

Prop: Sea $\mathcal{F}^\bullet$ cualquier complejo acotado de $\mathcal{O}_X$-mód coherentes sobre X var alg compleja proy. Entonces:

$$\mathbb{H}^k(X^{alg},\mathcal{F}^\bullet) \cong \mathbb{H}^k(X^{an},(\mathcal{F}^\bullet)^{an})$$ isom. preservando filtr. inocentes.

Dem: Sea $\mathcal{U}$ cobertura afín de X, entonces

$$\mathbb{H}^k(X^{alg},\mathcal{F}^\bullet) \underset{\text{Leray}}{\cong} \mathbb{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}^\bullet) \underset{\text{def}}{=} H^k\Big(\bigoplus_{p+q=\bullet} C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}^p), D\Big)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{H}^k(X^{an},(\mathcal{F}^\bullet)^{an}) \underset{\substack{\text{Leray}\\ (\text{afín}\Rightarrow\text{Stein})}}{\cong} \mathbb{H}^k(\mathcal{U},(\mathcal{F}^{\bullet})^{an}) \underset{\text{def}}{=} H^k\Big(\bigoplus_{p+q=\bullet} C^q(\mathcal{U},(\mathcal{F}^p)^{an}), D\Big)$$

compatible con las filtraciones inocentes, y luego hay morfismos inducidos en los graduados. Así, es iso $\iff$ $Gr_{\mathcal{F}}^p\, \mathbb{H}^k(X^{alg},\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} Gr_{\mathcal{F}}^p\, \mathbb{H}^k(X^{an},(\mathcal{F}^\bullet)^{an})$

$\forall p = 0, \dots, k$ $\qquad\qquad$ $\overset{\|}{E_\infty^{p,q}}$ $\qquad\qquad$ $(\overset{\|}{E_\infty^{p,q}})^{an}$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \| & & \| \\ V_0 & \longrightarrow & W_0 \\ \cup & & \\ \vdots & \longrightarrow & \\ V_{k-1} & \xrightarrow{\sim} & W_{k-1} \\ \cup & & \cup \\ V_k & \xrightarrow{\sim} & W_k \\ \cup & & \cup \\ 0 & & 0 \end{array}$$

si los cocientes son isom.

Como ambas suc. degeneran, basta probar $E_r^{p,q} \cong (E_r^{p,q})^{an}$ cierto r!

Pero: $E_1^{p,q} = H^q(X^{alg},\mathcal{F}^p) \underset{\text{GAGA}}{\cong} H^q(X^{an},(\mathcal{F}^p)^{an}) = (E_1^{p,q})^{an}$ ∎

Cor: Si X var proy suave compleja, entonces

$$F^p\, \mathbb{H}^k(X^{alg},\Omega_X^\bullet) \cong F^p\, H^k_{dR}(X)$$ filtración de Hodge

con $F^p H^k_{dR}(X) = H^{p,k-p} \oplus \dots \oplus H^{k,0}$

Obs: Si esta fuera la buena def. de cohom. de de Rham alg.

$$\mathbb{H}^k(X,\Omega_X^\bullet) \simeq H^k_{dR}(X).$$

En part, si $X = \mathcal{U}$ var. afín

$$\mathbb{H}^k(\mathcal{U},\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet) \cong H^k_{dR}(\mathcal{U})$$

Teo. de Atiyah-Hodge ($\mathcal{U}$ afín)

$\|$ Γ-acíclicos

$$H^k(\Gamma(\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet), d)$$

De hecho: $H^k(\Gamma(\Omega_{\mathcal{U}}^\bullet),d) \cong H^k(\Gamma(\Omega_{\mathcal{U}^{an}}^\bullet),d) \underset{\mathcal{U}\text{ Stein}}{\cong} \mathbb{H}^k(\mathcal{U}^{an},\Omega_{\mathcal{U}^{an}}^\bullet) \cong H^k_{dR}(\mathcal{U})$

$\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad H^k_{dR}(\mathcal{U}^{alg}) \qquad\qquad H^k_{dR}(\mathcal{U}^{an})$

$\Rightarrow$ sobre X^{alg}: $\Omega_X^\bullet \hookrightarrow \Omega_{X^{an}}^\bullet \hookrightarrow \Omega_{X^\infty}^\bullet$ son quasi-isom. $\Rightarrow$ Para toda var. alg suave $\mathbb{H}^k(X^{alg},\Omega_X^\bullet) \cong \mathbb{H}^k(X^{alg},\Omega_{X^{an}}^\bullet) \cong H^k_{dR}(X)$.

Obs: X^n var proy suave, $Y \subseteq X$ sec hip. hipersup. $\subseteq \mathbb{P}^{n+1}$, $\mathcal{U} = X \setminus Y$

$(\mathcal{U}, X)$ induce:

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(X,\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H_n(\mathcal{U}) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[dr, "\cap"'] & H_n(X,\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\text{Thom}"] & \cdots \\
H_{n-1}(Y) & & & H_{n-1}(Y) &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow H_{n-1}(Y) / \mathrm{Im}(\cap) =: H_{n-1}(Y)_{prim}$ y así:

$$0 \to H_{n-1}(Y)_{prim} \to H_n(\mathcal{U}) \to H_n(X)_{prim} \to 0$$

$$\rightsquigarrow 0 \to H^n_{dR}(X)_{prim} \to H^n_{dR}(\mathcal{U}) \to H^{n-1}_{dR}(Y)_{prim} \to 0$$

Debería pasar que esto induce:

$$0 \to F^p H^n_{dR}(X)_{prim} \to F^p H^n_{dR}(\mathcal{U}) \to F^{p-1} H^{n-1}_{dR}(Y)_{prim} \to 0 \,. \quad (\star)$$

pero

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{U}, \Omega^p_{\mathcal{U}}) = 0 \quad \forall q > 0 \,.$$

Atyah-Hodge

$\Longrightarrow$ Degenera en la pag E_2. Esto no es compatible con $(\star)$.

(!) No es la filtración de Hodge algebraica.